

6.1 Εκθετική κατανομή

Ορισμός 6.1. Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή. Λέμε ότι η X ακολουθεί την **εκθετική κατανομή** (*exponential distribution*) με παράμετρο θ αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & \forall x > 0, \theta > 0 \\ 0, & \forall x \leq 0. \end{cases}$$

Συμβολικά, $X \sim E(\theta)$.

Αποδεικνύεται ότι για την εκθετική κατανομή ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.1. Έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ :

- i. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$F(a) = \begin{cases} 0 & -\infty < a < 0 \\ 1 - e^{-a/\theta} & 0 \leq a < \infty. \end{cases}$$

- ii. Η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$E(X) = \theta.$$

- iii. Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$V(X) = \theta^2.$$

6.2 Κατανομή γάμμα

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό της κατανομής γάμμα πρέπει να ορίσουμε τη συνάρτηση γάμμα.

Ορισμός 6.2 Η **συνάρτηση γάμμα** (*gamma function*) ορίζεται, για κάθε πραγματικό και θετικό αριθμό a , από το ολοκλήρωμα

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} y^{a-1} e^{-y} dy.$$

Αποδεικνύεται ότι

- για $a > 1 \Rightarrow \Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$,

- για $a = \nu$ (φυσικός αριθμός) $\Rightarrow \Gamma(\nu) = (\nu - 1)!$,
- $\Gamma(1) = 1$,
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Ορισμός 6.3 Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή. Λέμε ότι η X ακολουθεί την **κατανομή γάμμα** (*gamma distribution*) με παραμέτρους α και β , αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & \forall x > 0; \alpha, \beta > 0 \\ 0 & \forall x \leq 0. \end{cases}$$

όπου $\Gamma(\alpha)$ είναι η συνάρτηση γάμμα.

Συμβολικά, $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$.

Αποδεικνύεται ότι για την κατανομή γάμμα ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.2. Έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κατανομή γάμμα με παραμέτρους α και β . Τότε:

- Η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$E(X) = \alpha\beta.$$
- Η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής X δίνεται από τη σχέση

$$V(X) = \alpha\beta^2.$$