

Απειροστικός Λογισμός Ι

Εξετάσεις 7 Σεπτεμβρίου 2004

1. (α) Υπάρχει ελάχιστος (γνησίως) θετικός αριθμός;
(β) Μπορείτε να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς ώστε μεταξύ τους να μην υπάρχει κανένας άλλος πραγματικός αριθμός;
(γ) Μεταξύ των αριθμών $\frac{2}{5}$ και $\frac{3}{5}$ υπάρχει άλλος ρητός αριθμός;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1μ)

2. Έστω $A \subseteq (-\infty, 0)$ και $B \subseteq (0, +\infty)$. Αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \epsilon$, δείξτε ότι $\sup A = \inf B$. (1.5μ)

3. Να υπολογισθούν, αν υπάρχουν, τα όρια των ακολουθιών:

$$\frac{3^n + 2}{2^n + 3}, \quad \sqrt[n]{5n + 1}, \quad \frac{n^2}{n!}. \quad (1.5\mu)$$

4. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

(ii) Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $|a_n - a| < \epsilon$.

(iii) Υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_o$ να ισχύει $|a_n - a| < \epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$.

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1μ)

5. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών.

(i) Αν δύο υπακολουθίες της (a_n) συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, μπορεί η (a_n) να συγκλίνει;

(ii) Αν δύο υπακολουθίες της (a_n) συγκλίνουν στο ίδιο όριο, είναι αλήθεια ότι η (a_n) συγκλίνει;

(iii) Αν $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η (a_n) συγκλίνει, δείξτε ότι τότε είναι σταθερή.

Αιτιολογήστε την απάντησή σας. (1.5μ)

6. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 5\sqrt{x}$. Χρησιμοποιώντας τον (ϵ, δ) -ορισμό, αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_o = 1$. (1μ)

7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $f = 0$. (1.5μ)

8. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $f(s)f(t) > 0$ για κάθε $s, t \in [a, b]$. (1μ)

9. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με f φραγμένη. Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ υπάρχει και είναι 0, να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)f(x)$. (1μ)

10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + 2x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
Εξετάστε αν υπάρχει η $f'(0)$. (1μ)

Σημειώστε στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας

(α) το τμήμα στο οποίο ανήκετε

(β) τους αριθμούς των θεμάτων που απαντήσατε (βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο αριθμό).

Μαζί με το γραπτό σας να παραδίδετε και τα θέματα.

Καλή επιτυχία!