Γραμμική Άλγεβρα Ι
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2011

1. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(α) (10 μονάδες) Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A.

(β) (5 μονάδες) Λύστε το ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = O$.

(γ) (5 μονάδες) Υπολογίστε τη διάσταση του υπόχωρου του $\mathbb{R}^{4\times 1}$ που παράγεται από τις στήλες του A.

(δ) (5 μονάδες) Δείξτε ότι για κάθε $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, το ομογενές γραμμικό σύστημα $(AB)x = O$ έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη λύση.

2. Δίνεται διανυσματικός χώρος V επί του $\mathbb{R}$, βάσεις $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ αυτού με $v_1 = u_1 + u_2 + u_3$, $v_2 = u_1 + u_3$, $v_3 = u_2 - u_3$ και γραμμικές απεικονίσεις $S : V \to V$ και $T : V \to V$ με πίνακες

$$(S : \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (T : \mathbf{v}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ως προς τις βάσεις $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$, αντίστοιχα.

(α) (10 μονάδες) Υπολογίστε τον πίνακα $(T : \mathbf{u}, \mathbf{u})$ της T ως προς τη βάση $\mathbf{u}$.

(β) (10 μονάδες) Υπολογίστε τη διάσταση του χώρου $\ker(S + T)$.

(γ) (10 μονάδες) Δείξτε ότι ισχύει $S(T(x)) = T(S(x))$ για κάθε $x \in V$.

3. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος (δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας);

(α) (5 μονάδες) Αν $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ και $A^2 + A - 3I_n = O$, τότε ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος.

(β) (5 μονάδες) Αν για τους πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ισχύει $A^2 + B^2 = O$, τότε $\det(AB) = 0$.

(γ) (5 μονάδες) Υπάρχει γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^{3\times 3}$ το οποίο περιέχει επτά άνω τριγωνικούς πίνακες.

(δ) (5 μονάδες) Υπάρχουν υπόχωροι U, V του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^4$ τέτοιοι ώστε $\dim(U) = 3$, $\dim(V) = 2$ και $U \cap V = \{0\}$.

(ε) (5 μονάδες) Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική απεικόνιση και ισχύει $\ker(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$, τότε $\dim\ker(T) \leq n/2$.

4. Δίνονται διανυσματικοί χώροι U, V, W πεπερασμένης διάστασης, γραμμικές απεικονίσεις $S : V \to W$ και $T : U \to V$ και η σύνθεσή τους $R = S \circ T : U \to W$.

(α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι $\ker(T) \subseteq \ker(R)$ και ότι $\mathrm{Im}(R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

(β) (10 μονάδες) Αν $\dim(U) = \dim(V)$ και η R είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων, δείξτε ότι οι S και T είναι επίσης ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 5/11/2011 – Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες – Καλή Επιτυχία