Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Εξέταση Ιουνίου 2009

Όνομα________Συνοπτικές ενδεικτικές λύσεις_____________

ΑΜ___________00π_____________________________________

Ημ/ία_________________

Αίθουσα_______________

1	2	3	4	Σύνολο

Η εξέταση αποτελείται από 4 Θέματα. Κάθε Θέμα αξίζει 3 μονάδες. Το άριστα είναι 10 μονάδες και η βάση είναι 5. Απαντήστε σε όσα θέματα επιθυμείτε. <u>Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.</u>

Καλή επιτυχία.

Θέμα 1 Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{3\times3}$.

a) (1.5 μον) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιόχωροι του A. Είναι ο A διαγωνίσμος; Ποιο είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του A;
b) (0.7 μον) Αν το πολυώνυμο $p(x) = (x-3)(x^5 - 5x + c)$ μηδενίζεται από τον A, να βρεθεί το c.
c) (0.8 μον) Να βρεθεί ένας διαγώνιος πίνακας D όμοιος με τον A, ένας αντιστρέψιμος πίνακας U με $A = UDU^{-1}$ και ένας διαγώνιος πίνακας D_1 όμοιος με τον A^2.

a) Με πράξεις ρουτίνας βρίσκουμε τις ιδιοτιμές 1,3 με αντίστοιχους ιδιόχωρους τους $V(1) = \{(x, y, 3x)^t \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $V(3) = \{(0, -x, 2x)^t \mid x \in \mathbb{R}\}$. Μια βάση του $V(1)$ είναι η $\{(0,1,0)^t, (1,0,3)^t\}$ και μια βάση του $V(3)$ είναι η $\{(0,-1,2)\}$, οπότε $\dim V(1) + \dim V(3) = 2 + 1 = 3$ και επομένως ο A είναι διαγωνίσιμος. Εφόσον ο A είναι διαγωνίσιμος και έχει ιδιοτιμές τις 1,3, έχουμε $m_A(x) = (x-1)(x-3)$.

Εναλλακτικά, για τον προσδιορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου και για το αν ο A είναι διαγωνίσιμος, θα μπορούσαμε να πούμε ότι από $\chi_A(x) = -(x-1)^2(x-3)$ έπεται ότι $m_A(x) = (x-1)(x-3)$ ή $m_A(x) = (x-1)^2(x-3)$. Με πράξεις βρίσκουμε $(A - I_3)(A - 3I_3) = 0$, οπότε $m_A(x) = (x-1)(x-3)$. Άρα ο A είναι διαγωνίσιμος.

b) Αν το $p(x) = (x-3)(x^5 - 5x + c)$ μηδενίζεται από τον A, τότε το $m_A(x) = (x-1)^2(x-3)$ διαιρεί το $p(x)$ και άρα το $x-1$ διαιρεί το $x^5 - 5x + c$. Δηλαδή έχουμε $1 - 5 + c = 0 \Rightarrow c = 4$.

c) Από το a) έπεται ότι ένας D είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ και ένας U είναι ο $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ένας D_1 είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, γιατί A όμοιος με τον $D \Rightarrow A^2$ όμοιος με τον D^2.

Θέμα 2 Έστω $a \in \mathbf{R}$ και $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (0.3 μον) Υπολογίστε τον προσαρτημένο πίνακα $adjA$ του A.

b) (0.7 μον) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των Cayley-Hamilton, ή αλλιώς, βρείτε ένα $\varphi(x) \in \mathbf{R}[x]$ βαθμού το πολύ 1 τέτοιο ώστε
$A^{11}(A-4I_2)^{10} = \varphi(A).$

c) Να βρεθούν όλες οι τιμές του a τέτοιες ώστε:

c1) (1 μον) Ο A να είναι τριγωνίσιμος στο $\mathbf{R}^{2\times 2}$, αλλά όχι διαγωνίσιμος στο $\mathbf{R}^{2\times 2}$.

c2) (1 μον) Υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbf{C}^{2\times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A.

a) Σύμφωνα με τον ορισμό, $adjA = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Έχουμε $\chi_A(x) = x^2 - 4x + 4 - a$ οπότε από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton

$$A^2 - 4A + (4-a)I_2 = 0 \Rightarrow A(A-4I_2) = (a-4)I_2 \Rightarrow$$

$$A^{10}(A-4I_2)^{10} = (a-4)^{10}I_2 \Rightarrow A^{11}(A-4I_2)^{10} = (a-4)^{10}A.$$

Άρα μπορούμε να θέσουμε $\varphi(x) = (a-4)^{10}x$.

c1) Ξέρουμε ότι ο A είναι τριγωνίσιμος στο $\mathbf{R}^{2\times 2}$ $\Leftrightarrow$ το $\chi_A(x) = x^2 - 4x + 4 - a$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων όρων στο $\mathbf{R}[x]$ $\Leftrightarrow$ $(-4)^2 - 4(4-a) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \geq 0$. Αν $a > 0$, τότε ο A διαθέτει 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές και άρα είναι διαγωνίσιμος στο $\mathbf{R}^{2\times 2}$, άτοπο. Αν $a = 0$, τότε $\chi_A(x) = (x-2)^2$ και $m_A(x) = (x-2)^2$ (γιατί $A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$). Άρα στην περίπτωση αυτή ο A δεν είναι διαγωνίσιμος.

Τελικά, A τριγωνίσιμος στο $\mathbf{R}^{2\times 2}$ αλλά όχι διαγωνίσιμος στο $\mathbf{R}^{2\times 2}$ $\Leftrightarrow$ $a = 0$.

c2) Ξέρουμε ότι υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbf{C}^{2\times 1}$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A $\Leftrightarrow$ ο A είναι κανονικός $\Leftrightarrow$ $AA^t = A^tA$ (γιατί $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$) $\Leftrightarrow$ (πράξεις) $a = \pm 1$.

Θέμα 3 Έστω $A \in \mathbf{C}^{\nu \times \nu}$.

a) (1.5 μον) Δείξτε ότι αν $\langle AX, X \rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbf{C}^{\nu \times 1}$, τότε $A = 0$.

b) (1.5 μον) Δείξτε ότι ο A είναι κανονικός αν και μόνο αν $\|AX\| = \|A^* X\|$ για κάθε $X \in \mathbf{C}^{\nu \times 1}$.

a) Θέτοντας $X + Y$ στη θέση του X, όπου $X, Y \in \mathbf{C}^{\nu \times 1}$, παίρνουμε $\langle A(X+Y), X+Y \rangle = 0$ οπότε χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε $\langle AX, Y \rangle + \langle AY, X \rangle = 0$. Στη τελευταία σχέση θέτουμε iY στη θέση του Y και παίρνουμε $-i\langle AX, Y \rangle + i\langle AY, X \rangle = 0$. Από τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $\langle AX, Y \rangle = 0$ για κάθε $X, Y \in \mathbf{C}^{\nu \times 1}$ και άρα $A = 0$.

b) Χρησιμοποιώντας το a) έχουμε: A κανονικός $\Leftrightarrow$
$A^* A - AA^* = 0 \Leftrightarrow \langle (A^* A - AA^*)X, X \rangle = 0$ για κάθε $X \in \mathbf{C}^{\nu \times 1}$.
Παρατηρούμε ότι

$$\langle (A^* A - AA^*)X, X \rangle = \langle A^* AX, X \rangle - \langle AA^* X, X \rangle =$$

$$\langle AX, AX \rangle - \langle A^* X, A^* X \rangle = \|AX\|^2 - \|A^* X\|^2.$$

Άρα A κανονικός $\Leftrightarrow$ $\|AX\|^2 - \|A^* X\|^2 = 0$ για κάθε $X \in \mathbf{C}^{\nu \times 1}$, δηλαδή αν και μόνο αν $\|AX\| - \|A^* X\| = 0$ για κάθε $X \in \mathbf{C}^{\nu \times 1}$.

Θέμα 4 Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. (Κάθε υποερώτημα αξίζει 0.6 μονάδες.)

a) Έστω $\lambda \in \mathbf{C}$ και $A \in \mathbf{C}^{\nu\times\nu}$. Αν το λ^2 είναι ιδιοτιμή του A^2, τότε το λ είναι ιδιοτιμή του A.

b) Αν ο $A \in \mathbf{R}^{\nu\times\nu}$ είναι συμμετρικός και μοναδιαίος, τότε $A^2 = I_\nu$.

c) Αν ο $A \in \mathbf{C}^{\nu\times\nu}$ είναι μοναδιαίος, τότε ο πίνακας $A+\frac{1}{2}I_\nu$ είναι αντιστρέψιμος.

d) Υπάρχει πίνακας $A \in \mathbf{R}^{5\times 5}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_A(x) = -x^3(x-2)(x+3)$ και ελάχιστο το $m_A(x) = x^2(x+3)$.

e) Έστω $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ με ιδιοτιμές $0,-1,3$ και έστω $B = A(A+I_3)(A-3I_3)$. Τότε το $X = (1,0,-4)^t$ είναι ιδιοδιάνυσμα του B.

a) Λάθος, πχ $\lambda = -1$ και $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Σωστό. Από τις υποθέσεις έχουμε $A = A^t, A^t = A^{-1}$ οπότε $A = A^{-1}$ και $A^2 = I_\nu$.

c) Σωστό, γιατί αν $\det(A+\frac{1}{2}I_\nu) = 0$, τότε το $-\frac{1}{2}$ είναι ιδιοτιμή του A, άτοπο γιατί κάθε ιδιοτιμή του A έχει μέτρο 1.

d) Λάθος, γιατί τα $\chi_A(x), m_A(x)$ δεν έχουν τις ίδιες ρίζες.

e) Σωστό, αφού από το Θεώρημα των Caley-Hamilton έχουμε $B = 0$.