Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ
Εξέταση Σεπτεμβρίου 2009

Όνομα________________συνοπτικές ενδεικτικές λύσεις______

ΑΜ____

Ημ/ία__________________

Αίθουσα_______________

1	**2**	**3**		**Σύνολο**

- Η εξέταση αποτελείται από 3 θέματα. Κάθε θέμα αξίζει 4 μονάδες.
- Το άριστα είναι 10 μονάδες και η βάση είναι 5.
- <u>Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.</u>
- Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή επιτυχία

Θέμα 1 Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

a) (1 μον) Υπολογίστε τη διάσταση του ιδιόχωρου του A (συναρτήσει του a).
b) (1 μον) Βρείτε όλες τις τιμές του a τέτοιες ώστε $\deg m_A(x) \le 2$.
c) (1 μον) Για τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο b) υπολογίστε το $m_A(x)$ και στη συνέχεια υπολογίστε τον A^{-1} χρησιμοποιώντας το $m_A(x)$.
d) (1 μον) Δείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και κάθε θετικό ακέραιο m ο A^m δεν είναι διαγωνίσιμος.

a) Ο A είναι τριγωνικός με κάθε διαγώνιο στοιχείο ίσο με 1. Άρα έχει μοναδική ιδιοτιμή το 1 (με αλγεβρική πολλαπλότητα 3). Θεωρώντας το μέγιστο αριθμό γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα $A-I$, παρατηρούμε ότι

$rank(A-I) = rank\begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, a=0 \\ 2, a\neq 0. \end{cases}$ Συνεπώς έχουμε

$$\dim V(1) = 3 - rank(A-I) = \begin{cases} 2, a=0 \\ 1, a\neq 0. \end{cases}$$

b) Επειδή $\chi_A(x) = -(x-1)^3$ και $m_A(x)$ είναι μονικό, θετικού βαθμού και διαιρεί το $\chi_A(x)$, παίρνουμε $m_A(x) = x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$. Τότε $\deg m_A(x) \le 2 \Leftrightarrow (A-I)^2 = 0.$

Με πολλαπλασιασμό πινάκων έχουμε $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ και άρα

$\deg m_A(x) \le 2 \Leftrightarrow a = 0.$

c) Για $a=0$ έπεται από πριν ότι $m_A(x) = x-1, (x-1)^2$. Επειδή $A \neq I$ έχουμε $m_A(x) \neq x-1$ οπότε $m_A(x) = (x-1)^2$. Τότε $(A-I)^2 = 0 \Rightarrow A^2 - 2A + I = 0 \Rightarrow I = -A^2 + 2A.$ Ο A είναι αντιστρέψιμος, γιατί πχ $\det A = 1 \neq 0$, και άρα πολλαπλασιάζοντας με A^{-1} παίρνουμε

$$A^{-1} = -A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) $1^{ος}$ τρόπος. Έστω A^m διαγωνίσιμος. Επειδή ο A^m είναι τριγωνικός με όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με 1, είναι όμοιος με το I. Άρα $A^m = PIP^{-1}$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα P, δηλαδή $A^m = I$. Συνεπώς ο A μηδενίζει το $x^m - 1$ και άρα $m_A(x) \mid x^m - 1$. Είδαμε πριν (b)) ότι $m_A(x) = x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$. Επειδή $A \neq I$

έχουμε $m_A(x) \neq x-1$ οπότε $m_A(x) = (x-1)^2, (x-1)^3$. Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε $(x-1)^2 \left| x^m - 1 \Rightarrow (x-1)^2 \right| (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1) \Rightarrow x-1 \left| x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + 1 \right.$, που είναι άτοπο.

$2^{ος}$ τρόπος. Υπολογίζουμε τον A^m. Έστω $B = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε $B^3 = 0$ και επομένως από το δυωνυμικό ανάπτυγμα

$$A^m = (I+B)^m = I + mB + \binom{m}{2} B^2 = \begin{pmatrix} 1 & ma & m + \binom{m}{2} a \\ 0 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ που είναι διάφορο του I

για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και θετικό ακέραιο m. Αν ο A^m ήταν διαγωνίσιμος, θα είχαμε (όπως στην αρχή του $1^{ου}$ τρόπου) $A^m = I$, άτοπο.

Θέμα 2

a) (1 μον) Έστω U ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα $(1,1,0,0),(0,0,1,1)$. Βρείτε μια ορθοκανονική βάση του $U^{\perp}$.

b) (1 μον) Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή Ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικός αριθμός.

c) Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές ή λάθος. Δώστε μια απόδειξη ή ένα αντιπαράδειγμα.

c1) (0.6 μον) Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{\nu\times\nu}$, ο πίνακας $A + A^* + iI_\nu$ είναι αντιστρέψιμος.

c2) (0.7 μον) Αν για τον $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ ισχύει $A^{10} = 0$, τότε $A^3 = 0$.

c3) (0.7 μον) Αν $\chi_A(x) = \chi_B(x)$, όπου $A, B \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$, τότε οι A, B είναι όμοιοι.

a) Έστω $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Ξέρουμε ότι $U^{\perp} = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \middle| \langle v, u \rangle = 0 \forall u \in U \right\}$. Επειδή το U παράγεται από τα $(1,1,0,0),(0,0,1,1)$ παρατηρούμε ότι

$(x, y, z, w) \in U^{\perp} \Leftrightarrow$

$\langle (x, y, z, w),(1,1,0,0) \rangle = \langle (x, y, z, w),(0,0,1,1) \rangle = 0 \Leftrightarrow x + y = z + w = 0.$

Πράγματι, αν $(x, y, z, w) \in U^{\perp}$, τότε από τον ορισμό έχουμε $\langle (x, y, z, w),(1,1,0,0) \rangle = \langle (x, y, z, w),(0,0,1,1) \rangle = 0$. Αντίστροφα, αν $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ είναι τέτοιο ώστε $\langle (x, y, z, w),(1,1,0,0) \rangle = \langle (x, y, z, w),(0,0,1,1) \rangle = 0$, τότε

$\langle (x, y, z, w), \lambda(1,1,0,0) + \mu(0,0,1,1) \rangle =$

$\lambda \langle (x, y, z, w),(1,1,0,0) \rangle + \mu \langle (x, y, z, w),(0,0,1,1) \rangle = 0 + 0 = 0$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, δηλαδή $\langle (x, y, z, w), u \rangle = 0$ για κάθε $u \in U$, δηλαδή $(x, y, z, w) \in U^{\perp}$.

Λύνοντας το σύστημα $x + y = z + w = 0$ βρίσκουμε ότι κάθε στοιχείο του $U^{\perp}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)$. Επειδή τα στοιχεία αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε τη βάση $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$ του $U^{\perp}$. Παρατηρούμε ότι τα $(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)$ είναι κάθετα (το εσωτερικό γινόμενό τους είναι 0) και άρα μια ζητούμενη ορθοκανονική βάση προκύπτει από την προηγούμενη διαιρώντας με τα μέτρα, δηλαδή προκύπτει η $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)\}$.

b) Βλέπε σημειώσεις από την τάξη ή οποιοδήποτε βιβλίο, πχ Θεώρημα 4.2.8 στο Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, τόμος ΙΙ, Βάρσος et al.

c1) Σωστό. Παρατηρούμε ότι ο $A + A^*$ είναι Ερμιτιανός αφού $(A + A^*)^* = A^* + (A^*)^* = A^* + A = A + A^*$. Αν $A + A^* + iI_\nu$ είναι μη αντιστρέψιμος, τότε $\det(A + A^* + iI_\nu) = 0 \Rightarrow -i$ ιδιοτιμή του $A + A^*$, άτοπο από το b).

c2) Σωστό. Από $A^{10} = 0$ έπεται ότι $m_A(x) = x^k, 1 \le k \le 10$. Από $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ έπεται ότι $k \le 3$. Άρα $m_A(x) = x^k, 1 \le k \le 3$, οπότε $A^k = 0$ και άρα $A^3 = 0$.

c3) Λάθος. Ένα αντιπαράδειγμα είναι $A = I_2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Έχουμε $\chi_A(x) = \chi_B(x) = (x-1)^2$, αλλά ο B δεν είναι όμοιος με το I αφού ο μόνος πίνακας όμοιος με τον I είναι ο I και $B \neq I$.

Θέμα 3

a) (1 μον) Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu x \nu}$. Αποδείξτε ότι, αν $\|AX\| = \|X\|$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^{\nu x 1}$,
τότε $\langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle$ για κάθε $X, Y \in \mathbb{R}^{\nu x 1}$.

b) (1.5 μον) Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2x2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{2x1}$ από ιδιοδιανύσματα του *A*, αν και μόνο αν $|\zeta| = 1$.

c) (1.5 μον) Για τον 2x2 πίνακα *A* του b), αν $\zeta = i$ να βρεθεί ένας πίνακας που διαγωνοποιεί τον *A* και να υπολογιστεί ο πίνακας $X = A^{10}$.

a) Για κάθε $X \in \mathbb{R}^{\nu x 1}$ έχουμε $\|AX\| = \|X\| \Rightarrow \|AX\|^2 = \|X\|^2 \Rightarrow \langle AX, AX \rangle = \langle X, X \rangle$.
Θέτοντας $X+Y$ στη θέση του X, όπου $X, Y \in \mathbb{R}^{\nu x 1}$, προκύπτει

$$\langle AX + AY, AX + AY \rangle = \langle X + Y, X + Y \rangle \Rightarrow$$

$$\langle AX, AX \rangle + \langle AX, AY \rangle + \langle AY, AX \rangle + \langle AY, AY \rangle = \langle X, X \rangle + \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle + \langle Y, Y \rangle$$

που λόγω της υπόθεσης δίνει $\langle AX, AY \rangle + \langle AY, AX \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle$. Αλλά για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^{\nu x 1}$ έχουμε $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ για κάθε $u, v \in \mathbb{R}^{\nu x 1}$, οπότε

$$\langle AX, AY \rangle + \langle AY, AX \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle Y, X \rangle \Rightarrow 2\langle AX, AY \rangle = 2\langle X, Y \rangle \Rightarrow \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

b) Ξέρουμε ότι υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{2x1}$ από ιδιοδιανύσματα του *A*, αν και μόνο αν ο A είναι κανονικός, δηλαδή $AA^* = A^*A$. Με πράξεις έχουμε

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ \overline{\zeta} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\zeta\overline{\zeta} & i+\zeta \\ -i+\overline{\zeta} & 2 \end{pmatrix}, A^*A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ \overline{\zeta} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \zeta + i \\ \overline{\zeta} - i & \overline{\zeta}\zeta + 1 \end{pmatrix},$$ οπότε

$$AA^* = A^*A \Leftrightarrow \zeta\overline{\zeta} = 1 \Leftrightarrow |\zeta|^2 = 1 \Leftrightarrow |\zeta| = 1.$$

c) Με τις συνήθεις πράξεις (που δεν αναγράφονται στις λύσεις αυτές, αλλά στο γραπτό πρέπει να φαίνονται σύμφωνα με τις οδηγίες στην πρώτη σελίδα) βρίσκουμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι οι 0,2 και οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι

$V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Ο *A* πράγματι είναι διαγωνίσιμος (πχ είναι 2×2 και έχει 2 διακεκριμένες ιδιοτιμές) και ένας διαγωνοποιών πίνακας είναι ο $P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Έχουμε $A^{10} = \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^{10} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} P^{-1} =$ (πράξεις) $= \begin{pmatrix} 2^9 & i2^9 \\ -i2^9 & 2^9 \end{pmatrix}$.