ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (Β. Δουγαλής)

(Η βαθμολογική αξία κάθε ερωτήματος σε παρένθεση. Σύνολο = Άριστα = 100.)

1. Διατυπώστε τον ορισμό της ευστάθειας και της τάξης ακρίβειας μιας μεθόδου RK για την επίλυση του π.α.τ. $y' = f(t,y)$, $a \le t \le b$, $y(a)=y_0$. Διατυπώστε ένα αποτέλεσμα σύγκλισης της μεθόδου, που συνδέει την ευστάθεια και την τάξη ακρίβειας με κατάλληλο φράγμα του σφάλματος. (8)

2. Σωστό ή Λάθος; (Απαντήστε με Σ ή Λ. Σωστή απάντηση $= +2$, λανθασμένη απάντηση $= -1$.)

α) Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler δεν είναι Α-ευσταθής. Λ

β) Η άμεση μέθοδος του Euler έχει τοπικό σφάλμα $O(h)$. Λ (αυ h

γ) Η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ πληροί συνθήκη Lipschitz στο $\mathbb{R}$.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = |x|^{0.8}$ πληροί συνθήκη Lipschitz στο $[-1,1]$. Λ

ε) Κάθε άμεση μέθοδος RK με τρία στάδια έχει τάξη ακρίβειας 3. Λ (αυ $\le$

στ) Υπάρχει πεπλεγμένη μέθοδος RK που δεν είναι Α-ευσταθής. Σ (π.χ. $\begin{array}{c|c} 1/3 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

ζ) Το πρόβλημα δύο σημείων $u'' = \sin 2\pi x$, $x \in [0,1]$, $u(0)=u(1)$, $u'(0)=u'(1)$, έχει πολλές λύσεις. Σ

η) Το πρόβλημα δύο σημείων $u'' = 2x$, $x \in [0,1]$, $u(0)=u(1)$, $u'(0)=u'(1)$, έχει μοναδική λύση.

3. Υποθέστε ότι έχουμε δύο μεθόδους RK για την επίλυση ενός π.α.τ. της μορφής $y' = f(t,y)$, $0 \le t \le 2$, με $y(0)=y_0$, με ομοιόμορφο διαμερισμό $t^n = nh$, $n = 0,1,\dots,N$, όπου $Nh = 2$. Υποθέστε ότι η πρώτη μέθοδος έχει μέγιστο σφάλμα για το οποίο ισχύει κατά προσέγγιση ότι $E \cong 64h^6$, ενώ για τη δεύτερη έχουμε $E \cong h^2$. Αν η πρώτη μέθοδος απαιτεί 8 υπολογισμούς της f ανά χρονικό βήμα και η δεύτερη 2 υπολογισμούς της f ανά βήμα, ποια μέθοδο θα προτιμούσατε (με κριτήριο το μικρότερο συνολικό κόστος

σε πλήθος υπολογισμών της f) αν θέλετε να έχετε σφάλμα περίπου ίσο με 10^{-6}; (10)

4. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής (Απαντήστε με Α, Β, Γ ή Δ.)

α) Ποιά είναι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου RK $\begin{array}{c|c} 1/4 & 1/4 \\ \hline & 1 \end{array}$;
Α: p=1, Β: p=2, Γ: p=3, Δ: p=4. (7)

β) Ποιά είναι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου RK $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ \hline \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \end{array}$;
Α: p=1, Β: p=2, Γ: p=3, Δ: p=4. (8)
θα το λύσω, αλλά είναι ή το Α ή το Β

γ) Ποιά είναι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου RK $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 \\ \hline 1/3 & 2/3 & \end{array}$; (8)
Α: p=1, Β: p=2, Γ: p=3, Δ: p=4.
το λύνω, και είναι ή το Α ή το Β

δ) Ποιό είναι το διάστημα απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου του 4γ;
Α: $[-1,0]$, Β: $[-1,1]$, Γ: $[-9/4,0]$, Δ: $[-2,0]$. (8)
θα είναι ή το Α ή το Γ ή το Δ (μάλλον το Γ)

ε) Τι βήμα απαιτείται για να λυθεί το σύστημα $y'=\begin{pmatrix}0 & 10\\ -10 & 0\end{pmatrix}y$ με απόλυτη ευστάθεια με την άμεση μέθοδο του Euler;
Α: κάθε $h>0$, Β: $h\le 10^{-1}$, Γ: $h\le 10^{-2}$, Δ: $\nexists\, h\neq 0$. (7)
(βρίσκω τις φανταστικές ιδιοτιμές)

στ) Ίδιο ερώτημα όπως 4ε για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.
Α: κάθε $h>0$, Β: $h\le 10^{-1}$, Γ: $h\le 10^{-2}$, Δ: $\nexists\, h\neq 0$. (8)
(εισάγουμε έναν j12)

5. Θεωρείστε το πρόβλημα δύο σημείων
$$\begin{cases} -u''(x)+x^2u(x)=\sin x, & 0\le x\le \\ u(0)=0, \quad u'(1)+u(1)=2. \end{cases}$$
και την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών
$-\frac{1}{h^2}(U_{j-1}-2U_j+U_{j+1})+x_j^2U_j=\sin x_j$, $1\le j\le J$, όπου U_j οι προσεγγίσεις της λύσης $u(x_j)$ στα σημεία $x_j=jh$, $j=0,1,\dots,J+1$, όπου $(J+1)h=1$. Διατυπώστε κατάλληλες συνοριακές συνθήκες που πρέπει να πληροί η $U=[U_0,U_1,\dots,U_{J+1}]^T$. Προσδιορίστε τον πίνακα A και το δεξί μέλος b του συστήματος $AU=b$ της μεθόδου, και διερευνήστε αν το σύστημα έχει μοναδική λύση. (20)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (Β. Δουγαλής)

(Η βαθμολογική αξία κάθε ερωτήματος σε παρένθεση. Σύνολο = Άριστα = 100.)

1. Πότε λέμε ότι μια αριθμητική μέθοδος για την επίλυση του προβλήματος $y' = f(t,y)$, $a \le t \le b$, $y(a) = y_0$, είναι απόλυτα ευσταθής; Πώς ορίζεται η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου; Γιατί οι μέθοδοι με μεγάλη περιοχή απόλυτης ευστάθειας έχουν υπολογιστικό πλεονέκτημα; Ποιές μέθοδοι λέγονται Α-ευσταθείς; (10)

2. Σωστό ή λάθος; (Απαντήστε με Σ ή Λ. Σωστή απάντηση = +2, λανθασμένη απάντηση = −1.)

α) Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler έχει τοπικό σφάλμα $O(h^2)$.
β) Η άμεση μέθοδος του Euler είναι Α-ευσταθής.
γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|}$ πληροί συνθήκη Lipschitz στο $[-1, 1]$.
δ) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ πληροί συνθήκη Lipschitz στο $[1, \infty)$.

ε) Υπάρχουν μέθοδοι Runge-Kutta που δεν είναι ευσταθείς.
ς) Κάθε άμεση μέθοδος RK με δύο στάδια έχει τάξη ακρίβειας 2.
ζ) Δεν υπάρχουν άμεσες μέθοδοι RK που έχουν ως περιοχή απόλυτης ευστάθειας όλο το ημιεπίπεδο $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le 0\}$.
η) Οι πεπλεγμένες μέθοδοι RK είναι Α-ευσταθείς.
θ) Το πρόβλημα δύο σημείων $u'' = 2$, $u(0) = u(1)$, $u'(0) = u'(1)$ έχει μοναδική λύση.

3. Αναφέρατε τα βασικά βήματα για την υλοποίηση μιας άμεσης μεθόδου Runge-Kutta με μεταβλητό βήμα h_n, έτσι ώστε το τοπικό σφάλμα να παραμένει μικρό. (10)

4. Δίδεται η μέθοδος Runge-Kutta $\begin{array}{c|c} 1/4 & 1/4 \\ \hline & 1 \end{array}$.

α) Δείξτε ότι έχει τάξη ακρίβειας ένα. (10)

β) Προσδιορίστε την περιοχή απόλυτης ευστάθειάς της. (10)

γ) Αν η μέθοδος εφαρμοσθεί στο σύστημα

$$\begin{cases} y_1' = -100\,y_1 + 10\,y_2 \\ y_2' = 10\,y_1 - 100\,y_2 \end{cases}, \quad t \geq 0, \quad \begin{array}{l} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = -3, \end{array}$$

πόσο μικρό πρέπει να πάρουμε το βήμα h ώστε οι υπολογισμοί να γίνουν με απόλυτη ευστάθεια; (10)

δ) Το ίδιο ερώτημα για το σύστημα $\begin{cases} y_1' = -100\,y_1 + 20\,y_2 \\ y_2' = -20\,y_1 - 100\,y_2 \end{cases}, \quad t \geq 0, \quad \begin{array}{l} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = -1. \end{array}$ (12)

5. Θεωρείστε το πρόβλημα δύο σημείων

$$(*) \begin{cases} -u''(x) + \cos x \, u(x) = \sin x, & -1 \leq x \leq 1, \\ u(-1) = 1, \quad u'(1) = 0, \end{cases}$$

και την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών

$$-\frac{1}{h^2}\left(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}\right) + \cos x_j \, U_j = \sin x_j, \quad 1 \leq j \leq J,$$

όπου U_j οι προσεγγίσεις της λύσης $u(x_j)$ στα σημεία $x_j = -1 + jh$, $j = 0, 1, \ldots, J+1$, $(J+1)h = 2$. Συμπληρώστε την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες που πρέπει να πληροί η λύση $U = [U_0, U_1, \ldots, U_{J+1}]^T$. Προσδιορίστε τον πίνακα A και το δεξιό μέλος b του συστήματος $AU = b$ της μεθόδου, και αποδείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. (20)

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2008

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (Β. Δουγαλής)

(Η βαθμολογική αξία των θεμάτων σε παρένθεση. Σύνολο = Άριστα = 100.)

1. Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών $(*)\begin{cases} y' = f(t,y), & a \le t \le b, \\ y(a) = y_0. \end{cases}$

α) Διατυπώστε ικανές συνθήκες ώστε το $(*)$ να έχει μοναδική λύση $y(t)$ για $a \le t \le b$, για οποιοδήποτε $y_0 \in \mathbb{R}$. (2.5)

β) Ορίστε μιά γενική μέθοδο Runge-Kutta με q στάδια για την αριθμητική επίλυση του $(*)$. Πότε λέμε ότι η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας p; (3)

γ) Ορίστε την περιοχή απόλυτης ευστάθειας για μιά αριθμητική μέθοδο για την επίλυση του $(*)$. (2.5)

2. Σωστό ή Λάθος; (Απαντήστε με Σ ή Λ. Σωστή απάντηση = +2, Λανθασμένη = −1).

α) Η άμεση μέθοδος του Euler είναι A-ευσταθής.

β) Η πεπλεγμένη μέθοδος του Euler είναι A-ευσταθής.

γ) Υπάρχει A-ευσταθής μέθοδος Runge-Kutta με τάξη ακρίβειας $p=16$.

δ) Όλες οι μέθοδοι Runge-Kutta είναι ευσταθείς.

ε) Οι ιδιοτιμές του πίνακα $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ βρίσκονται στο διάστημα $[-6,6]$.

ς) Η συνάρτηση $f(x) = x^{3/2}$ πληροί συνθήκη Lipschitz στο διάστημα $[0,1]$.

ζ) Η συνάρτηση $f(x) = x^{1/2}$ πληροί συνθήκη Lipschitz στο διάστημα $[0,1]$.

η) Η συνάρτηση $f(x) = x^{1/2}$ πληροί συνθήκη Lipschitz στο διάστημα $[2,3]$.

θ) Το πρόβλημα $u'' = e^x \sin x$, $0<x<1$, $u'(0)=0$, $u'(1)=0$ έχει μοναδική λύση.

ι) Η μέγιστη τάξη ακρίβειας μιας άμεσης μεθόδου Runge-Kutta είναι δύο.

3. Δίνεται η μέθοδος Runge-Kutta $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1/8 \\ \hline -3 & 4 & \end{array}$.

α) Προσδιορίστε την τάξη ακρίβειάς της. (10)

β) Χαρακτηρίστε την περιοχή απόλυτης ευστάθειάς της στο μιγαδικό επίπεδο και προσδιορίστε το διάστημα απόλυτης ευστάθειάς της. (10)

γ) Θεωρείστε το σύστημα Δ.Ε.

$$\begin{cases} y_1' = -200 y_1 + 50 y_2 \\ y_2' = 50 y_1 - 200 y_2 \end{cases}, \quad t \ge 0, \quad \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = -5 \end{cases}$$

Πόσο μικρό πρέπει νά πάρουμε το βήμα h έτσι ώστε, όταν η μέθοδος εφαρμοσθεί σ' αυτό το σύστημα, οι υπολογισμοί νά γίνουν με απόλυτη ακρίβεια (10)

δ) Ίδιο ερώτημα για τό σύστημα Δ.Ε.

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}, \quad t \geq 0, \quad \begin{cases} y_1(0) = 4 \\ y_2(0) = -1 \end{cases} \qquad (10)$$

4. Αναφέρατε τα βασικά βήματα για τήν εκτίμηση του τοπικού σφάλματος μιάς άμεσης μεθόδου Runge-Kutta, με σκοπό τήν υλοποίησή της με μεταβλητό βήμα h_n, έτσι ώστε το τοπικό σφάλμα να παραμένει μικρό. (12)

5. Θεωρείστε το πρόβλημα δύο σημείων

$$(*) \begin{cases} -u''(x) + 2u'(x) + e^x u(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

Κατασκευάστε μία μέθοδο πεπερασμένων διαφορών γιά τήν αριθμητική επίλυση της (*) χρησιμοποιώντας τήν συνήθη κεντρική διαφορά γιά τήν προσέγγιση του όρου $-u''$ καί προσεγγίζοντας τόν όρο $u'(x)$ μέ το πηλίκο $\dfrac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$. Έστω U_j, $0 \leq j \leq J+1$, οι προσεγγίσεις των τιμών της λύσης $u(x_j)$ στα σημεία $x_j = jh$, $j = 0, \ldots, J+1$ όπου $(J+1)h = 1$ που δίνει η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.

Προσδιορίστε τον $J \times J$ πίνακα των συντελεστών καί τό δεύτερο μέλος του γραμμικού συστήματος, το οποίο πληροί το διάνυσμα $[U_1, U_2, \ldots, U_J]^T$ τών αγνώστων, καί αποδείξτε, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Gerschgorin, ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση. (20)