ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: 'ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι'
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΕΤΟΣ 2004-2005

ΠΡΩΤΟ ΠΑΚΕΤΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y' = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)},\ y(0) = -1.$$

2. Να δειχτεί ότι αν a και λ είναι θετικές σταθερές και b οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε κάθε λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

έχει την ιδιότητα $y \to 0$ καθώς το $t \to +\infty$.

Υπόδειξη: Να θεωρηθούν ξεχωριστά οι περιπτώσεις $a = \lambda$ και $a \neq \lambda$.

3. Να βρεθεί μία εξίσωση πρώτης τάξης που να έχει την ακόλουθη οικογένεια ολοκληρωτικών καμπυλών

$$y^2 = 2ax.$$

4. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = ry - ky^2,$$

όπου $r > 0$ και $k > 0$ σταθερές.

5. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2.$$

6. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

(α) $x^2y' = y^2 + 2xy.$

(β) $(y-2x)dx + (4y+3x)dy = 0.$

7. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

(α) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y-1}{x+4y+2}.$

(β) $(2x-2y)dx + (y-1)dy = 0.$

8. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$$

είναι ακριβής και να υπολογιστεί η γενική της λύση.
Απάντηση: $x^2y - x^3 - y^2 = c$.

9. Να υπολογιστεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων αφού βρεθεί ο κατάλληλος κάθε φορά ολοκληρωτικός παράγοντας.

(α) $ydx - (x + 6y^2)dy = 0$.
Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\dfrac{1}{y^2}$.
Γενική λύση: $\dfrac{x}{y} - 6y = c$.

(β) $(5x^2 - y)dx + xdy = 0$.
Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\dfrac{1}{x^2}$.
Γενική λύση: $\dfrac{y}{x} + 5x = c$.

10. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(t)$ που είναι τέτοιες ώστε η διαφορική εξίσωση

$$f(t)\,x' + t^2 + x = 0 \ , \quad x = x(t) \ ,$$

να δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = t$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση.

11. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$\Big(3t + \frac{6}{y}\Big) + \Big(\frac{t^2}{y} + \frac{3y}{t}\Big)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Να βρεθεί ο ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\mu(t, y) = t^{\alpha}y^{\beta}$ και με τη χρήση του στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση.

12. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(3t + 2y + y^2)dt + (t + 4ty + 5y^2)dy = 0.$$

Υπόδειξη: $\mu(t, y) = \mu(t + y^2)$.

13. Να μετατραπεί το ακόλουθο Π.Α.Τ. σε ολοκληρωτική εξίσωση και να προσδιοριστούν οι πρώτες τέσσερεις προσεγγίσεις Picard:

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2 \quad , \quad y(1) = 2.$$

14. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y' = \frac{(1+t)^2}{(1+y)^2}.$$

Αν $y = \varphi(t)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\varphi(0) = -0.2$, δείξτε (χωρίς να λυθεί η εξίσωση) ότι $\varphi(t) < t$, για κάθε t.

15. Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα φάσης και να χαρακτηριστούν τα σημεία ισορροπίας των παρακάτω εξισώσεων.

(α) $y' = 3y(1-y)$.

(β) $y' = y^2 - 6y - 16$.

16. Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας, να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια και να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης της διαφορικής εξίσωσης

$$y' = y(y^2 - \mu)\ , \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Ειδικότερα για $\mu = 1$ και $y(0) = \dfrac{1}{2}$ να βρεθούν τα $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.

17. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης για την

$$y' = \mu y^2 + y^4 =: f_\mu(y).$$

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: 'ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι'
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΕΤΟΣ 2004-2005

ΔΕΥΤΕΡΟ ΠΑΚΕΤΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να βρεθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων:

(α) $y'' + 4y' + 4y = x - 2e^{2x}$

(β) $8y'' + 4y' + y = \sin x - 2\cos x$

2. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, να δειχθεί ότι για κάθε λύση $y = \varphi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ισχύει

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0.$$

3. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ και $y_1(t), y_2(t)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = g(t),$$

όπου $g \in C(I)$, I διάστημα του $\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to+\infty} \Big(y_1(t) - y_2(t)\Big) = 0.$$

4. Να βρεθεί η γενική λύση μίας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης αν είναι γνωστό ότι οι

$$\phi_1(t) = t^2 \ , \ \phi_2(t) = t^2 + e^t \ , \ \phi_3(t) = 1 + t^2 + 2e^t$$

είναι λύσεις της.

Υπόδειξη: Η διαφορά δύο λύσεων της μη ομογενούς είναι λύση της ομογενούς.

5. Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}.$$

Απάντηση:

$$y(t) = Ae^t + Bte^t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)e^t + te^t \arctan t.$$

6. Να υπολογιστεί το ω έτσι ώστε η λύση του Π.Α.Τ.

$$y'' + 4y = \cos\omega t \ \ , \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1,$$

να είναι μη φραγμένη. Να βρεθεί η $y(t)$ και να σχεδιαστεί το γράφημά της.

7. Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + 5y' + 6y = f(t) \ , \ \ t \geq 0,$$

όπου η $f(t)$ είναι συνεχής με $|f(t)| \leq b$ για κάθε $t \geq 0$, όπου $b > 0$. Αν $\varphi(t)$ είναι η ειδική λύση της εξίσωσης που προκύπτει με τη μέθοδο του Lagrange, να δειχτεί ότι

$$|\varphi(t)| \leq \frac{5}{6}b.$$

8. Να λυθεί το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' = 1 + te^t, \\ y(0) = y'(0) = 0 \ , \ y''(0) = 1. \end{cases}$$

9. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$t^2y'' + 5ty' - 5y = 0.$$

10. Να βρεθεί λύση της μορφής $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για τη διαφορική εξίσωση

$$y' = 2xy.$$

Απάντηση:

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = a_0 e^{x^2} \ , \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

11. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις σε μορφή δυναμοσειρών (δυνάμεων του x) των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων. Για ποιες τιμές του x συγκλίνουν οι δυναμοσειρές;

(α) $\quad y'' - x^2 y = 0.$

Απάντηση:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4n-1)(4n)}, \\ \varphi_2(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (4n)(4n+1)}. \end{aligned}$$

(β) $y'' + x^3 y' + x^2 y = 0.$

Απάντηση:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4n-1)(4n)} x^{4n},\\ \varphi_2(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 6 \cdots (4n-2)}{4 \cdot 5 \cdots (4n)(4n+1)} x^{4n+1}.\end{aligned}$$

12. Να βρεθεί λύση φ της διαφορικής εξίσωσης

$$(1 + x^2) y'' + y = 0,$$

της μορφής $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ που ικανοποιεί τις $\varphi(0) = 0$ και $\varphi'(0) = 1$. Για ποιες τιμές του x συγκλίνει η δυναμοσειρά;

13. Η διαφορική εξίσωση

$$y'' + e^x y = 0$$

έχει μία λύση φ της μορφής $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ που ικανοποιεί τις $\varphi(0) = 1$ και $\varphi'(0) = 0$. Να υπολογισθούν τα a_k, για $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Υπόδειξη: $a_k = \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$ και $\varphi''(x) = -e^x \varphi(x)$.

14. Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \dfrac{1}{t} \end{bmatrix}, \quad t > 0,$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $\boldsymbol{y}(1) = [-2, 1]^t$.

15. Να βρεθεί ο e^{At} αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

16. Να λυθεί το σύστημα $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Ο A είναι πίνακας απλής δομής και $|A - \lambda I_3| = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$.

17. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Ο A έχει τριγωνική μορφή και ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

18. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Υπόδειξη: Ο πίνακας A έχει block–διαγώνια δομή.

19. Να προσδιοριστούν όλα τα διανύσματα $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία η λύση του Π.Α.Τ.

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \ , \ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0,$$

είναι περιοδική συνάρτηση.

20. Θεωρούμε το σύστημα

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}.$$

(α) Να βρεθεί η γενική του λύση.

(β) Να προσδιοριστεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών έτσι ώστε οι αντίστοιχες λύσεις να τείνουν στο 0 καθώς το $t \to +\infty$.

Συνοπτική λύση: Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Γενική λύση:

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για το (β) πρέπει $c_1 = 0$, επομένως $\boldsymbol{x}(0) = [0, c_2]^t$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

21. Είναι η

$$X(t) = \begin{bmatrix} t & e^t \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

θεμελιώδης λύση για σύστημα $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, όπου A σταθερός πίνακας;

22. Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \quad , \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \ ,$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ ,$$

και ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ο πίνακας e^{At} και η λύση $\boldsymbol{y}(t)$ του Π.Α.Τ.

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: 'ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι'
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΕΤΟΣ 2003-2004

ΕΡΓΑΣΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

1. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$y'(t) = -3\Big(y(t)\Big)^{\frac{4}{3}} \sin t\ , \quad y(t_0) = y_0 > 0.$$

2. (α) Να δειχτεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$xf(tx) + tg(tx)x' = 0,$$

όπου f και g συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις, μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x - tx^2 - (t + t^2 x)x' = 0.$$

3. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις

$$\text{(α)} \qquad y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2,$$

$$\text{(β)} \qquad y' = \frac{2\cos^2 t + \sin^2 t - y^2}{2\cos t},$$

αν είναι γνωστές οι ειδικές λύσεις

$$y_1(t) = -\frac{1}{t}$$

για την (α) και

$$y_1(t) = \sin t$$

για την (β).

4. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0.$$

5. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x \sin \frac{y}{x} \cdot y' = y \sin \frac{y}{x} + x.$$

6. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 4}{x - y - 6}.$$

8. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

9. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$$

10. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$ye^{xy}dx + (3 + xe^{xy})dy = 0$$

είναι ακριβής και να υπολογιστεί η λύση της που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$.

Απάντηση: $e^{xy} + 3y = c$.

11. Να υπολογιστεί η γενική λύση των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων αφού βρεθεί ο κατάλληλος κάθε φορά ολοκληρωτικός παράγοντας.

(α) $(5x^2 - y)dx + xdy = 0$.

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\dfrac{1}{x^2}$.

Γενική λύση: $\dfrac{y}{x} + 5x = c$.

(β) $(x + y)dx + (\tan x)dy = 0$.

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\cos x$.

Γενική λύση: $y \sin x + x \sin x + \cos x = c$.

(γ) $2ydx + \left(x - \sin \sqrt{y}\right) dy = 0$.

Απάντηση: Ολοκληρωτικός παράγοντας: $\dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

Γενική λύση: $x\sqrt{y} + \cos \sqrt{y} = c$.

12. Έστω $f(t,x)$ συνεχής συνάρτηση στο $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ και μη φθίνουσα ως προς x για σταθεροποιημένο t. Έστω ακόμη g και h συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις στο $[0,+\infty)$ που ικανοποιούν τις

$$h'(t) \leq f\Big(t, h(t)\Big) \ \ ,\ t \geq 0,$$

$$g'(t) = f\Big(t, g(t)\Big) \ \ ,\ t \geq 0.$$

(α) Εάν $h(0) < g(0)$ τότε $h(t) < g(t)$ για $t \geq 0$.

(β) Να δειχθεί ότι το συμπέρασμα του (α) δεν είναι κατ΄ ανάγκη σωστό αν $h(0) \leq g(0)$.

13. Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} x' = x^2 + \dfrac{7}{8}e^{t^4} \\ x(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

(α) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη τοπικής λύσης.

(β) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη ολικής λύσης.

14. Έστω $g\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz και $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. Να δειχθεί ότι το Π.Α.Τ. για το σύστημα

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ y' = f(x)y \end{cases}$$

έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $[a,b]$.

Υπόδειξη: Κάνοντας χρήση της ιδιότητας Lipschitz να δειχθεί ότι $x_1(t) \equiv x_2(t)$. Εφαρμόστε Gronwall για να δείξετε ότι $y_1(t) \equiv y_2(t)$.

15. Για καθεμία από τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας, υπολογίστε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση γύρω από τα σημεία ισορροπίας, χαρακτηρίστε τα σημεία ισορροπίας ως υπερβολικά ή μη και μελετήστε την ευστάθειά τους. Τέλος κατασκευάστε τα διαγράμματα φάσης.

$$\begin{array}{llll} (\alpha) & y' = 1 + y^2, & (\beta) & y' = 1 - y^2, \\ (\gamma) & y' = 2\sin y, & (\delta) & y' = y\sin y. \end{array}$$

16. Θεωρούμε ότι ένας πληθυσμός ψαριών εξελίσσεται σύμφωνα με τη διαφορική εξίσωση

$$y' = ky - cy^2 - h\ ,\ \ y(0) > 0.$$

Θεωρούμε τις k και c ως φιξαρισμένες θετικές σταθερές, ενώ την $h \in \mathbb{R}^+$ θετική παράμετρο και μελετούμε την επίδραση του ρυθμού αλίευσης h στον πληθυσμό $y(t)$.

(α) Εάν $0 < h \leq \dfrac{k^2}{4c}$ τότε υπάρχει κρίσιμη τιμή y_0 τέτοια ώστε αν $y(0) < y_0$ τότε η αντίστοιχη λύση $y(t)$ μηδενίζεται για κάποιον πεπερασμένο χρόνο. Στην περίπτωση αυτή κάνουμε λόγο για «εξαφάνιση». Αντίθετα αν $y(0) > y_0$ τότε η $y(t)$ τείνει σε σημείο ισορροπίας καθώς το $t \to +\infty$.

(β) Εάν $h > \frac{k^2}{4c}$ τότε έχουμε εξαφάνιση ανεξάρτητα από την αρχική τιμή $y(0)$.

17. Έστω

$$y' = \mu y(1-y)^2 - y^3 =: f_\mu(y).$$

Να προσδιοριστούν τα σημεία διακλάδωσης και να σχεδιαστεί το διάγραμμα διακλάδωσης, συμπεριλαμβανομένης και της ευστάθειας.

18. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, να δειχθεί ότι για κάθε λύση $y = \varphi(t)$ της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ισχύει

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0.$$

19. Αν $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ και $y_1(t), y_2(t)$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = g(t),$$

όπου $g \in C(I)$, I διάστημα του $\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to+\infty} \Big(y_1(t) - y_2(t)\Big) = 0.$$

20. Να βρεθεί η γενική λύση μίας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης αν είναι γνωστό ότι οι

$$\phi_1(t) = t^2 \ , \ \phi_2(t) = t^2 + e^t \ , \ \phi_3(t) = 1 + t^2 + 2e^t$$

είναι λύσεις της.

Υπόδειξη: Η διαφορά δύο λύσεων της μη ομογενούς είναι λύση της ομογενούς.

21. Αν ψ_1 και ψ_2 είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2y' + 5y = f(t),$$

όπου f συνεχής, να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to+\infty} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| = 0.$$

22. Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}.$$

Απάντηση:

$$y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} - e^{-2t} - e^{-2t}\ln|t|.$$

23. Να υπολογιστεί η λύση του Π.Α.Τ.

$$u'' + u = F(t) \ \ , \ u(0) = 0, \ u'(0) = 0,$$

όπου

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t & , \ 0 \le t \le \pi, \\ F_0(2\pi - t) & , \ \pi \le t \le 2\pi, \\ 0 & , \ 2\pi \le t, \end{cases}$$

με F_0 σταθερά.

24. Να υπολογιστεί το ω έτσι ώστε η λύση του Π.Α.Τ.

$$y'' + 4y = \cos \omega t \ \ , \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1,$$

να είναι μη φραγμένη. Να βρεθεί η $y(t)$ και να σχεδιαστεί το γράφημά της.

25. Να βρεθεί η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + xy' + y = \log x \ , \quad x > 0.$$

<u>Απάντηση:</u> $y(x) = \log x + c_1 \sin \log x + c_2 \cos \log x$.

26. Να βρεθεί η γενική λύση των ακόλουθων διαφορικών εξισώσεων.

(α) $y'' + 3y = t^3 - 1$
(β) $y'' + 4y' + 4y = te^{at}$
(γ) $y'' - y = t^2 e^t$
(δ) $y'' + y' + y = 1 + t + t^2$
(ε) $y'' + 5y' + 4y = t^2 e^{7t}$
(στ) $y'' + y' - 6y = \sin t + te^{2t}$
(ζ) $y'' + 2y' = 1 + t^2 + e^{-2t}$
(η) $y'' + y' + y = \sin^2 t$
(ϑ) $y'' + 2y' - 3y = 1 + te^t$
(ι) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^t - te^{2t}$

27. Να βρεθεί λύση της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + y = 0.$$

<u>Απάντηση:</u>

$$\begin{aligned} y &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= a_0 \cos x + a_1 \sin x \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

28. Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις σε μορφή δυναμοσειρών (δυνάμεων του x) των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων. Για ποιες τιμές του x συγκλίνουν οι δυναμοσειρές;

(α) $y'' - xy' + y = 0.$

Απάντηση:

$$\varphi_1(x) = x \ , \ \varphi_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!2^n(2n-1)}.$$

(β) $y'' + 3x^2y' - xy = 0.$

Απάντηση:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 8 \cdot 17 \cdots (9n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)} x^{3n}, \\ \varphi_2(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2 \cdot 11 \cdot 20 \cdots (9n-7)}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)} x^{3n+1}.\end{aligned}$$

29. Να βρεθεί λύση φ της διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + (x-1)^2 y' - (x-1)y = 0,$$

της μορφής $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ που ικανοποιεί τις $\varphi(1) = 1$ και $\varphi'(1) = 0$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $x - 1 = t$.

30. Η διαφορική εξίσωση

$$y'' + e^x y = 0$$

έχει μία λύση φ της μορφής $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ που ικανοποιεί τις $\varphi(0) = 1$ και $\varphi'(0) = 0$. Να υπολογισθούν τα a_k, για $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Υπόδειξη: $a_k = \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}$ και $\varphi''(x) = -e^x \varphi(x)$.

31. Να γραφτεί το σύστημα

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 - y_2 \end{cases}$$

σε διανυσματική μορφή και να βρεθεί η γενική λύση με τη μέθοδο των πινάκων.

32. Να δειχθεί ότι ο πίνακας

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2 & \ln t \\ 0 & \dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \ , \quad t > 0,$$

είναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{1}{t} \end{bmatrix} \boldsymbol{y}$$

και στη συνέχεια να υπολογιστεί η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $\boldsymbol{y}(1) = [-2, 1]^t$.

33. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}.$$

Να διερευνηθεί αν υπάρχει μη μηδενική λύση του συστήματος $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y_1(0) = 0 = y_1(2)$, όπου $\boldsymbol{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^t$.

34. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

<u>Υπόδειξη:</u> Ο A έχει τριγωνική μορφή και ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

35. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Υπόδειξη:</u> Ο A είναι μη απλής δομής με μιγαδικές ρίζες, $|A - \lambda I_4| = (\lambda^2 + 1)^2$.

36. Να προσδιοριστούν όλα τα διανύσματα $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία η λύση του Π.Α.Τ.

$$\boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \;\; , \; \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0,$$

είναι περιοδική συνάρτηση.

37. (α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας με n διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ για τις οποίες ισχύει $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0,\; i = 1, 2, \ldots, n$. Να αποδειχτεί ότι οι λύσεις του συστήματος $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ είναι φραγμένες καθώς το $t \to +\infty$.

(β) Να δειχτεί μέσω αντιπαραδείγματος με $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ότι το συμπέρασμα στο (α) δεν ισχύει κατ' ανάγκη, αν παραληφθεί η υπόθεση ότι οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες.

<u>Υπόδειξη:</u> Θεωρήστε πίνακα μη απλής δομής.

38. Δίνεται το Π.Α.Τ.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t) \quad , \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \ ,$$

όπου

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad , \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ ,$$

και ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Να βρεθούν ο πίνακας e^{At} και η λύση $\boldsymbol{y}(t)$ του Π.Α.Τ.

39. Να λυθεί το Π.Α.Τ.

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} \quad , \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \ ,$$

με

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$