ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

Εξετάσεις Ιουνίου 1998

A

4) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Α. Είναι ο πίνακας Α διαγωνοποιήσιμος ;

β) Να βρεθεί ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : R^3 \to R^3$, που αντιστοιχεί στον πίνακα Α ως προς την συνήθη βάση του R^3, καθώς και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μετασχηματισμού Τ.

5) α) Αν $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ ένα στοιχείο ενός διαν. χώρου V[F] με εσωτερικό γινόμενο, να απόδειχθεί ότι το σύνολο $W=\{\mathbf{u}\in V \,/\, \langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle=1\}$ δεν είναι διαν. υπόχωρος του V.

β) Να αποδειχθεί ότι η σχέση $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$ με $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ και $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο R^3 και να επαληθευτεί η ανισότητα του Schwarz στην περίπτωση $\mathbf{x}=(1,0,2)$ και $\mathbf{y}=(2,1,2)$

6) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος $V=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1-x_2=x_3+x_4 \;, x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\}$ του χώρου R^4. Να βρεθεί μια βάση του V η οποία να περιέχει το διάνυσμα (1,1,-1,1).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

B

Εξετάσεις Ιουνίου 1998

4) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Α. Είναι ο πίνακας Α διαγωνοποιήσιμος ;

β) Να βρεθεί ο γραμμικός μετασχηματισμός $T: R^3 \to R^3$, που αντιστοιχεί στον πίνακα Α ως προς την συνήθη βάση του R^3, καθώς και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μετασχηματισμού T.

5) α) Αν **v** ένα στοιχείο ενός διαν. χώρου V[F] με εσωτερικό γινόμενο, να αποδειχθεί ότι το σύνολο $W=\{\mathbf{u}\in V \,/\, \langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle=0\}$ είναι διαν. υπόχωρος του V.

β) Έστω C[-1,1] ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα [-1,1]. Να αποδειχθεί ότι για $f,g\in C[-1,1]$ η σχέση :

$\langle f|g\rangle=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)f(x)g(x)dx$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο C[-1,1] και να επαληθευτεί η ανισότητα του Schwarz στην περίπτωση όπου $f(x)=x$ και $g(x)=x^3$.

6) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος $V=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,/\, x_1+x_2=x_3-x_4 \;,\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\}$ του χώρου R^4. Να βρεθεί μια βάση του V η οποία να περιέχει το στοιχείο (1,1,3,1).

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1998

4) Έστω $B_1=\{e_1,e_2\}$ μια βάση ενός διαν. χώρου V[R] και $T: V\rightarrow V$ γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος ορίζεται από τις σχέσεις $Te_1=3e_1-2e_2$ και $Te_2=e_1+4e_2$. Αν $B_2=\{f_1,f_2\}$ με $f_1=e_1+e_2$ και $f_2=2e_1+3e_2$ είναι επίσης μια βάση του V, να βρεθεί ο πίνακας του μετ/σμού T ως προς την βάση B_2, δηλ. ο $[T\alpha]_{\mathbf{B2}}$ ***(1.6)***

6) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος $V=\{(x,y,z,w)\ /\ y-2z+w=0\}$ του R^4. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V.

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1998

4) Έστω $T: R^3\rightarrow R^2$ γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος ορίζεται από τη σχέση $T(x,y,z)=(2x+y-z,3x-2y+4z)$. Να βρεθεί ο πίνακας του μετ/σμού T ως προς τις βάσεις $B_1=\{f_1=(1,1,1),\ f_2=(1,1,0),\ f_3=(1,0,0)\}$ και $B_2=\{g_1=(1,3),\ g_2=(1,4)\}$ των R^3 και R^2 αντίστοιχα, δηλ. ο πίνακας ${}_{B1}[T]_{B2}$. ***(1.6)***

5) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ του χώρου $M_3[R]$. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. ***(1.7)***

6) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος $V=\{(x,y,z,w)\ /\ y+z+w=0\}$ του R^4. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V. ***(1.7)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1999

A

4) Δείξτε ότι τα διανύσματα v=(1+i , 2i) και w=(1 , 1+i) του διαν. χώρου C^2 είναι γραμμικά εξαρτημένα επί του σώματος C και γραμμικά ανεξάρτητα επί του σώματος R.

5) Έστω W ο υπόχωρος που παράγεται από τα πολυώνυμα

$v_1(x)=x^3-2x^2+4x+1$, $v_2(x)=x^3+6x-5$, $v_3(x)=2x^3-3x^2+9x-1$, $v_4(x)=2x^3-5x^2+7x+5$

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του W.

6) Έστω V ο διαν. χώρος των πολυωνύμων. Να δείξετε ότι η έκφραση :

$$\left(f(x),g(x)\right)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

αποτελεί εσωτερικό γινόμενο : Έστω $f(x)=x+2$, $g(x)=x^2-2x-3$. Να υπολογιστούν α) $(f(x),g(x))$, β) $\|f(x)\|$, $\|g(x)\|$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 1999

B

4) Δείξτε ότι τα διανύσματα v=(1+i , 2i) και w=(1 , 1+i) του διαν. χώρου C^2 είναι γραμμικά εξαρτημένα επί του σώματος C και γραμμικά ανεξάρτητα επί του σώματος R.

5) Έστω U και W οι υπόχωροι του R^4 , οι οποίοι ορίζονται ως εξής :

$U=\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\ /\ \beta+\gamma+\delta=0\}$, $W=\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\ /\ \alpha+\beta=0,\ \gamma=2\delta\}$

Να βρεθεί η διάσταση και μια βάση των υποχώρων i) U, ii) W, iii) $U \cap W$

6) Ποιές από τις επόμενες εκφράσεις ορίζουν εσωτερικά γινόμενα στον διανυσματικό χώρο C[-1,1] των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο κλειστό διάστημα [-1,1], όπου f(x), g(x)∈C[-1,1] .

α) $(f,g)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)f(x)g(x)dx$

β) $(f,g)=\int_{-1}^{1}x^2f(x)g(x)dx$

A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙβ

15-9-2003

ΘΕΜΑ 1

Έστω $U(S)$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από το σύνολο:

$S=\{(1,0,-1,1),(2,-1,0,1),(1,1,2,1)\}$. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}=(1,3,3,2)$ ανήκει στον $U(S)$ και να βρεθεί μια βάση του $U(S)$ που να περιέχει το **x**.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & x+1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΘΕΜΑ 3

Να αποδείξετε ότι η έκφραση $\langle u,v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, όπου $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathbb{R}^2$

B

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IIβ

15-9-2003

ΘΕΜΑ 1 Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T:V \to V$ ως πρός την βάση $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ ενός χώρου *V*. Να βρεθεί ο πίνακας του μετασχηματισμού αυτού ως προς την βάση

$\{\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2+2\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3,\mathbf{u}_3=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_3\}$ του χώρου *V*.

ΘΕΜΑ 2 Δίνεται ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του *x* για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΘΕΜΑ 3 Να αποδείξετε ότι η έκφραση $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$, όπου $\mathbf{u}=(x_1,x_2)$, $\mathbf{v}=(y_1,y_2)$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathbb{R}^2$.

A-

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IIβ

16 - 6 - 2000

ΘΕΜΑ 4

Έστω M_2[**R**] ο διανυσματικός χώρος των τετραγωνικών πινάκων 2×2 με στοιχεία από το σώμα των πραγματικών αριθμών και *W* ο υπόχωρος αυτού ο οποίος παράγεται από τους πίνακες

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του χώρου W. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από την σχέση: για κάθε $C,D\in M_2[\mathbf{R}],\quad \langle C|D\rangle=\mathrm{Tr}\left(D^{\mathrm{T}}C\right)$.

ΘΕΜΑ 5

Έστω ότι ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ ως προς την βάση $\mathrm{B}=\{\mathbf{e}_1=(1,0),\mathbf{e}_2=(0,1)\}$ είναι ο $[\mathrm{T}]_{\mathrm{B}}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Να βρεθεί ο πίνακας του μετασχηματισμού ως προς την βάση $\mathrm{B}'=\{\mathbf{w}_1=2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2,\mathbf{w}_2=\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2\}$, δηλαδή ο $[\mathrm{T}]_{\mathrm{B}'}$.

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & x\end{pmatrix}$ με $x\in\mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IIβ -B-

16 - 6 - 2000

ΘΕΜΑ 4

Έστω W ο υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbf{C}^3[\mathbf{C}]$ ο οποίος παράγεται από τα στοιχεία $u_1=(1,i,1),\quad u_2=(1,2,1-i)$

Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του χώρου W. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από την σχέση: για κάθε $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{C}$ με $\mathbf{v}=(z_1,z_2,z_3),\mathbf{w}=(c_1,c_2,c_3)$, $\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle=z_1^*c_1+z_2^*c_2+z_3^*c_3$.

ΘΕΜΑ 5

Έστω ότι ο πίνακας ενός γραμμικού μετασχηματισμού $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ ως προς την βάση $\beta=\{\mathbf{e}_1=(1,0),\mathbf{e}_2=(0,1)\}$ είναι ο $[T]_B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

Να βρεθεί ο πίνακας του μετασχηματισμού ως προς την βάση $\mathrm{B}' = \{\mathbf{w}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{w}_2 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\}$, δηλαδή ο $[T]_{B'}$.

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται ο πίνακας $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 2001

(Μεταφερομένη Εξεταστική περίοδος)

1) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις αποτελούν εσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο V=R^3 και γιατί:

Α) $(\mathbf{v},\mathbf{u})=|\mathbf{v}|\,|\mathbf{u}|$ Β) $(\mathbf{v},\mathbf{u})=|\mathbf{v}|\,|\mathbf{u}|\cos^3\theta$, Γ) $(\mathbf{v},\mathbf{u})=2|\mathbf{v}|\,|\mathbf{u}|\cos\theta$

2) Έστω V ο διαν. χώρος των τετραγωνικών πινάκων τύπου 2×2 επί του σώματος R και M ο πίνακας : $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε τον τελεστή $T : V\to V$ που ορίζεται από την σχέση $T : A\in V\to T(A)\equiv MA$. Να βρεθεί η παράσταση του τελεστή T υπό μορφή πίνακα ως προς την συνήθη βάση του V που είναι :

$$E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί το ίχνος του T και η παράσταση του τυχαίου διανύσματος A

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

B

Εξετάσεις Ιουνίου 2001

1) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις ορίζουν γραμμικούς μετασχηματισμούς και σε ποιους χώρους και γιατί;

Α) T(x,y)=(x+1, 3y, y-x) Β) T(x,y)=(|x|,0) Γ) T(x,y)=(xy,y) Δ) T(x,y,z)=(z,x,y)

Ε) T(x,y)=(cosx, siny)

2) Δίνεται ο τελεστής $T : R^3 \rightarrow R^2$, T(x,y,z)=(3x+2y-4z, x-5y+3z)

α) Να βρεθεί η παράσταση του T που αντιστοιχεί ως προς τις βάσεις :

$\{f_1=(1,1,1), f_2=(1,1,0), f_3=(1,0,0)\}$ του R^3 και $\{g_1=(1,3), g_2=(2,5)\}$ του R^2

β) Να επαληθευθεί η σχέση $[T]_f^g [v]_f = [T(v)]_g$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 2002

(μεταφερομένη)

1) Δίνεται ο μετασχηματισμός $T : R^3 \rightarrow R^3$ που ορίζεται από τη σχέση:

T(x,y,z)=(x+3z, y+4z, 2z)

α) Να αποδειχθεί ότι ο T είναι γραμμικός.

β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Τ.

γ) Ελέγξτε εάν ο Τ είναι αντιστρέψιμος και σε θετική περίπτωση να βρεθεί ο αντίστροφος.

δ) Να βρεθεί η παράταση του Τ ως προς την βάση Β={$\mathbf{u}_1$=(1,0,1), $\mathbf{u}_2$=(0,1,1), $\mathbf{u}_3$=(1,1,1))

2) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $V=R^3$ και την απεικόνιση

$$f : R^3 \times R^3 \to R \quad f : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \to f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \equiv p_1 v_1 u_1 + p_2 v_2 u_2 + p_3 v_3 u_3$$

όπου $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+ v_2\mathbf{j}+ v_3\mathbf{k}$, $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+ u_2\mathbf{j}+ u_3\mathbf{k}$ και p_1, p_2, p_3 τυχαίοι θετικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση f ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του R^3.

3) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $f : R \to R$ επί του σώματος των πραγματικών αριθμών. Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του V είναι διανυσματικοί υπόχωροι επί του σώματος των πραγματικών αροθμών;

α) Το σύνολο όλων των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού ακριβώς n.

β) Το σύνολο όλων των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού > n.

γ) Το σύνολο όλων των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού ≤ n. ***(2)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

Εξετάσεις Ιουνίου 2002

B

1) Δίνεται ο μετασχηματισμός $T : R^3 \to R^3$ που ορίζεται από τη σχέση:

T(x,y,z)=(2y, x-z, -x+y+2z)

α) Να αποδειχθεί ότι ο Τ είναι γραμμικός.

β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Τ.

γ) Ελέγξτε εάν ο Τ είναι αντιστρέψιμος και σε θετική περίπτωση να βρεθεί ο αντίστροφος.

δ) Να βρεθεί η παράταση του Τ ως προς την βάση Β={u_1=(1,1,0), u_2=(1,1,1), u_3=(1,0,1))

2) Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $V=R^2$ και την απεικόνιση

$$f : R^2 \times R^2 \to R \qquad f : (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \to f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \equiv v_1u_1 - v_1u_2 - v_2u_1 + 3v_2u_2$$

όπου $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+ v_2\mathbf{j}$, $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+ u_2\mathbf{j}$. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση f ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο επί του R^2.

3) Έστω C[0, 1] ο διανυσματικός χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων επί του σώματος R των πραγματικών αριθμών, που ορίζονται στο κλειστό διάστημα [0, 1]. Ποια από τα επόμενα υποσύνολα του είναι διανυσματικοί υπόχωροι επί του σώματος των πραγματικών αριθμών;

(i) $\{f \in C[0,1] \mid f(1) = 0 \}$

(ii) $\{f \in C[0,1] \mid f(1) = 1 \}$

(iii) $\{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1) \}$ ***(2)***

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

A

Εξετάσεις Ιουνίου 2003

1) Έστω $T : R^3 \to R^3$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από την σχέση

$$T(x,y,z)=(2x-y+3z,\ 2x+4y+z,\ -5y+2z)$$

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση α) της εικόνας U=ImT και β) του πυρήνος W=kerT

2) Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

3) Μια επίπεδη ελαστική μεμβράνη έχει σχήμα κύκλου, του οποίου η περιφέρεια έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Τεντώνουμε την μεμβράνη έτσι ώστε ένα σημείο της P(x,y) να μεταφέρεται στο σημείο Q(x′,y′) βάσει της σχέσης :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν τα σημεία της μεμβράνης, των οποίων τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης δεν περιστρέφονται κατά το τέντωμα της. Να βρεθεί το νέο σχήμα της μεμβράνης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΒ

B

Εξετάσεις Ιουνίου 2003

1) Έστω T : $R^3 \to R^3$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από την σχέση

$$T(x,y,z)=(x-2y+6z,\ 2x+y-3z,\ 3x-y+3z)$$

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση α) της εικόνας U=ImT και β) του πυρήνος W=kerT

2) Δίνεται ο πίνακας $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

3) Μια επίπεδη ελαστική μεμβράνη έχει σχήμα κύκλου, του οποίου η περιφέρεια έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Τεντώνουμε την μεμβράνη έτσι ώστε ένα σημείο της P(x,y) να μεταφέρεται στο σημείο Q(x′,y′) βάσει της σχέσης :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν τα σημεία της μεμβράνης, των οποίων τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης δεν περιστρέφονται κατά το τέντωμα της. Να βρεθεί το νέο σχήμα της μεμβράνης.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙβ

1-7-2004

ΘΕΜΑ 1 Έστω ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ και $\mathbf{u}_3$ ενός διανυσματικού χώρου $V[\mathbb{R}]$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Να εξετάσετε αν τα σύνολα $S_1 = \{\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1\}$ και $S_2 = \{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή ανεξάρτητα. (2 *μονάδες*)

ΘΕΜΑ 2 Να αποδείξετε ότι

α) το σύνολο $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των τετραγωνικών πινάκων 2×2 στο σώμα $\mathbb{R}$ (1 *μονάδα*)

β) να βρεθεί η διάσταση του υπόχωρου αυτού. (1 *μονάδα*)

ΘΕΜΑ 3 Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ο οποίος ορίζεται από την σχέση $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$

α) Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας του μετασχηματισμού αυτού ως προς την βάση $\mathrm{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ είναι $[\mathrm{T}]_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (1 *μονάδα*)

β) Είναι ο ανωτέρω πίνακας διαγωνοποιήσιμος; (1 *μονάδα*)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙβ

1-7-2004

ΘΕΜΑ 1 Έστω ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ και $\mathbf{u}_3$ ενός διανυσματικού χώρου $V[\mathbb{R}]$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Να εξετάσετε αν τα σύνολα

$S_1 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}$ και $S_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3\}$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή ανεξάρτητα. (2 *μονάδες*)

ΘΕΜΑ 2 Να αποδείξετε ότι

α) το σύνολο $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του διανυσματικού χώρου των τετραγωνικών πινάκων 2×2 στο σώμα $\mathbb{R}$ (1 *μονάδα*)

β) να βρεθεί η διάσταση του υποχώρου αυτού. (1 *μονάδα*)

ΘΕΜΑ 3 Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ο οποίος ορίζεται από την σχέση $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_3)$

α) Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας του μετασχηματισμού αυτού ως προς την βάση $\mathrm{B} = \{(1,1,-1), (1,-1,1), (-1,1,1)\}$ είναι $(T)_{\mathrm{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (1 *μονάδα*)

β) Είναι ο ανωτέρω πίνακας διαγωνοποιήσιμος; (1 *μονάδα*)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙβ

16-6-2005

ΘΕΜΑ 4 (2 *μονάδες*)

a. Να εξετάσετε αν το υποσύνολο $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, των τετραγωνικών πινάκων 2×2, είναι γραμμικώς εξαρτημένο ή ανεξάρτητο.

b. Να αποδείξετε ότι η έκφραση $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2}$, ;όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, ορίζει στάθμη στον χώρο $\mathbb{R}^2$.

ΘΕΜΑ 5 (*2 μονάδες*)

Έστω $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^4$.

a. Να αποδειχθεί ότι το *U* είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$.

b. Να βρεθεί μια βάση του *U*.

ΘΕΜΑ 6 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν

a. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του *A*. (1 *μονάδα*)

b. Ο πίνακας A^n όπου $n = 2, 3, \cdots$. (1.5 *μονάδες*)

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2011

A

1) Έστω ο διανυσματικός χώρος $V=R^3$ επί του σώματος R. Θεωρούμε την συνήθη βάση $B_e=\{\mathbf{e}_1=(1,0,0),\ \mathbf{e}_2=(0,1,0),\ \mathbf{e}_3=(0,0,1)\}$ και τον τελεστή $T : R^3 \to R^3$, του οποίου η παράσταση υπό μορφή πίνακα ως προς την βάση B_e είναι:

$$[T]_{B_e} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθεί η παράσταση του T ως προς την βάση $B_f=\{\mathbf{f}_1=(2,3,5),\ \mathbf{f}_2=(1,0,0),\ \mathbf{f}_3=(0,1,-1)\}$.
β) Να βρεθούν οι διανυσματικοί υπόχωροι Im(T), Ker(T) και οι διαστάσεις τους.

2) Έστω ο διανυσματικός χώρος $P_3(x)$ των πολυωνύμων $3^{ου}$ βαθμού. Θεωρούμε την απεικόνιση $T: P_3(x) \to P_3(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$T : f(x) \to T(f(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2+3x+2\right)f(x)\right]$$

όπου f(x) πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού.

α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική.

β) Να βρείτε την παράσταση της υπό μορφή πίνακα ως προς την βάση $B=\{1, x, x^2, x^3\}$

3) Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

4) α) Αν **v** ένα στοιχείο ενός διαν. χώρου V[F] με εσωτερικό γινόμενο, να αποδειχθεί ότι το σύνολο $W=\{\mathbf{u}\in V \ / \ \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle=0\}$ είναι διαν. υπόχωρος του V.

β) Έστω C[-1,1] ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα [-1,1]. Να αποδειχθεί ότι για $f,g\in C[-1,1]$ η σχέση :

$\langle f|g\rangle=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)f(x)g(x)dx$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο C[-1,1] και να επαληθευτεί η ανισότητα του Schwarz $|\langle f(x)|g(x)\rangle|\le\|f(x)\|\|g(x)\|$ στην περίπτωση όπου $f(x)=x$ και $g(x)=x^3$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2011

B

1) Έστω ο διανυσματικός χώρος $V=R^3$ επί του σώματος R. Θεωρούμε την συνήθη βάση $B_e=\{\mathbf{e}_1=(1,0,0),\ \mathbf{e}_2=(0,1,0),\ \mathbf{e}_3=(0,0,1)\}$ και τον τελεστή $T : R^3 \to R^3$, του οποίου η παράσταση υπό μορφή πίνακα ως προς την βάση B_e είναι:

$$[T]_{B_e} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθεί η παράσταση του T ως προς την βάση $B_f=\{\mathbf{f}_1=(3,2,1),\ \mathbf{f}_2=(1,0,-2),\ \mathbf{f}_3=(0,0,1)\}$.
β) Να βρεθούν οι διανυσματικοί υπόχωροι Im(T), Ker(T) και οι διαστάσεις τους.

2) Έστω ο διανυσματικός χώρος $P_3(x)$ των πολυωνύμων $3^{ου}$ βαθμού. Θεωρούμε την απεικόνιση $T: P_3(x) \to P_3(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$T : f(x) \to T(f(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)f(x)\right]$$

όπου f(x) πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού.

α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική.

β) Να βρείτε την παράσταση της υπό μορφή πίνακα ως προς την βάση $B=\{1, x, x^2, x^3\}$

3) Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

4) α) Αν $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ ένα στοιχείο ενός διαν. χώρου V[F] με εσωτερικό γινόμενο, να απόδειχθεί ότι το σύνολο $W=\{\mathbf{u}\in V \ / \ <\mathbf{u}|\mathbf{v}>=1\}$ δεν είναι διαν. υπόχωρος του V.

β) Να αποδειχθεί ότι η σχέση $<\mathbf{x}|\mathbf{y}>=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$ με $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ και $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο R^3 και να επαληθευτεί η ανισότητα του Schwarz $|<f(x)|g(x)>|\leq\|f(x)\|\|g(x)\|$ στην περίπτωση $\mathbf{x}=(1,0,2)$ και $\mathbf{y}=(2,1,2)$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2011

(για τους επί πτυχίω)

1) Έστω ο διανυσματικός χώρος $V=R^3$ επί του σώματος R. Θεωρούμε την συνήθη βάση $B_e=\{\mathbf{e}_1=(1,0,0),\ \mathbf{e}_2=(0,1,0),\ \mathbf{e}_3=(0,0,1)\}$ και τον τελεστή $T: R^3 \to R^3$, του οποίου η παράσταση υπό μορφή πίνακα ως προς την βάση B_e είναι:

$$[T]_{B_e}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθεί η παράσταση του T ως προς την βάση $B_f=\{\mathbf{f}_1=(3,2,1),\ \mathbf{f}_2=(1,0,-2),\ \mathbf{f}_3=(0,0,1)\}$.
β) Να βρεθούν οι διανυσματικοί υπόχωροι Im(T), Ker(T) και οι διαστάσεις τους.

2) Έστω ο διανυσματικός χώρος $P_3(x)$ των πολυωνύμων 3[ου] βαθμού. Θεωρούμε την απεικόνιση $T: P_3(x) \to P_3(x)$ που ορίζεται από την σχέση:

$$T: f(x) \to T(f(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)f(x)\right]$$

όπου f(x) πολυώνυμο 3[ου] βαθμού.

α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική.

β) Να βρείτε την παράσταση της υπό μορφή πίνακα ως προς την βάση $B=\{1, x, x^2, x^3\}$

3) Δίνεται ο πίνακας $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ με $x \in \mathbf{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος.

4) α) Αν $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ ένα στοιχείο ενός διαν. χώρου V[F] με εσωτερικό γινόμενο, να αποδειχθεί ότι το σύνολο $W=\{\mathbf{u}\in V \,/\, \langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle=1\}$ δεν είναι διαν. υπόχωρος του V.

β) Να αποδειχθεί ότι η σχέση $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$ με $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ και $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο R^3 και να επαληθευτεί η ανισότητα του Schwarz $|\langle f(x)|g(x)\rangle|\leq\|f(x)\|\|g(x)\|$ στην περίπτωση $\mathbf{x}=(1,0,2)$ και $\mathbf{y}=(2,1,2)$

A

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2011

1) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού.

α) Να αποδειχθεί ότι το υποσύνολο U του V που ικανοποιεί την σχέση $P(7)=0$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο.

β) Να βρεθεί μια βάση αυτού του υποχώρου **(2)**

2) Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του διανυσματικού χώρου R^3 αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο του R^3;

α) U={ (x,y,z) / x+y+z=0} β) W={ (x,y,z) / x+y+z=2} **(1)**

3) Έστω ο διανυσματικός χώρος M_2 των τετραγωνικών πινάκων 2×2 και η απεικόνιση

$$\mathrm{T}:\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_2,\quad \mathrm{T}:\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\to \mathrm{T}\left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)\equiv\begin{pmatrix} 2c & a+c\\ b-2c & d\end{pmatrix}$$

Α) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση T είναι γραμμική.

Β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης T.

Γ) Οι διαστάσεις της εικόνας Im(T) και του πυρήνα Ker(T).

(Υπόδειξη: Θεωρείστε το διάνυσμα-πίνακα $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ σαν διάνυσμα-στήλη $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$. **(2,5)**

4) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του διαφορικού τελεστή $\frac{d}{dx}$ ο οποίος επιδρά στον διανυσματικό χώρο $P_3(x)$ των πολυωνύμων $3^{ου}$ βαθμού. **(2)**

5) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος V={(x,y,z,w) / y+z+w=0} του R^4. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V. ***(2.5)***

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2011

B

1) Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων $P(x)$ $3^{ου}$ βαθμού.

α) Να αποδειχθεί ότι το υποσύνολο U του V που ικανοποιεί την σχέση $P(5)=0$ αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο.

β) Να βρεθεί μια βάση αυτού του υποχώρου **(2)**

2) Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του διανυσματικού χώρου R^3 αποτελούν διανυσματικό υπόχωρο του R^3;

α) U={ (x,y,z) / x+y-z=0}

β) W={ (x,y,z) / x+y-z=2} **(1)**

3) Έστω ο διανυσματικός χώρος M_2 των τετραγωνικών πινάκων 2×2 και η απεικόνιση

$$\mathrm{T}: \mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_2, \quad \mathrm{T}: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \mathrm{T}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \equiv \begin{pmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{pmatrix}$$

Α) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση Τ είναι γραμμική.

Β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της απεικόνισης Τ.

Γ) Οι διαστάσεις της εικόνας Im(T) και του πυρήνα Ker(T).

(Υπόδειξη: Θεωρείστε το διάνυσμα-πίνακα $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ σαν διάνυσμα-στήλη $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.**(2,5)**

4) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του διαφορικού τελεστή $\dfrac{d}{dx}$ ο οποίος επιδρά στον διανυσματικό χώρο $P_2(x)$ των πολυωνύμων $3^{ου}$ βαθμού. **(2)**

5) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος V={(x,y,z,w) / y-2z+w=0} του R^4. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V. **(2,5)**

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2012

(για τους επί πτυχίω)

1) Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ του χώρου $M_3[R]$. Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.

2) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος $V=\{(x,y,z,w) \;/\; y+z+w=0\}$ του R^4. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V.

3) Έστω V ο διαν. χώρος των πολυωνύμων. Να δείξετε ότι η έκφραση :

$$\big(f(x),g(x)\big)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

αποτελεί εσωτερικό γινόμενο : Έστω $f(x)=x+2$, $g(x)=x^2-2x-3$. Να υπολογιστούν α) $(f(x),g(x))$, β) $\|f(x)\|$, $\|g(x)\|$.

4) Μια επίπεδη ελαστική μεμβράνη έχει σχήμα κύκλου, του οποίου η περιφέρεια έχει εξίσωση $x^2+y^2=1$. Τεντώνουμε την μεμβράνη έτσι ώστε ένα σημείο της $P(x,y)$ να μεταφέρεται στο σημείο $Q(x',y')$ βάσει της σχέσης :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν τα σημεία της μεμβράνης, των οποίων τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης δεν περιστρέφονται κατά το τέντωμα της. Να βρεθεί το νέο σχήμα της μεμβράνης.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2012

A

1) α) Αν $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ ένα στοιχείο ενός διαν. χώρου V[F] με εσωτερικό γινόμενο, να αποδειχθεί ότι το σύνολο $W=\{\mathbf{u}\in V \,/\, \langle\mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle=1\}$ δεν είναι διαν. υπόχωρος του V.

β) Να αποδειχθεί ότι η σχέση $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle=x_1y_1+2x_2y_2+3x_3y_3$ με $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ και $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο χώρο R^3 και να επαληθευτεί η ανισότητα του Schwarz στην περίπτωση $\mathbf{x}=(1,0,2)$ και $\mathbf{y}=(2,1,2)$. ***(2)***

2) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος $V=\{(x,y,z,w) \,/\, y-2z+w=0\}$ του R^4. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V. ***(2)***

3) Δίνεται ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+1 & 1 & x+1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$ με $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος. ***(2)***

4) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις αποτελούν εσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο $V=R^3$ και γιατί:

Α) $(\mathbf{v},\mathbf{u})=|\mathbf{v}|\,|\mathbf{u}|$ Β) $(\mathbf{v},\mathbf{u})=|\mathbf{v}|\,|\mathbf{u}|\cos^3\theta$, Γ) $(\mathbf{v},\mathbf{u})=2|\mathbf{v}|\,|\mathbf{u}|\cos\theta$ ***(1,5)***

5) Δίνεται ο μετασχηματισμός $T : R^3 \to R^3$ που ορίζεται από τη σχέση:

$T(x,y,z)=(x+3z,\ y+4z,\ 2z)$

α) Να αποδειχθεί ότι ο T είναι γραμμικός.

β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του T.

γ) Ελέγξτε εάν ο T είναι αντιστρέψιμος και σε θετική περίπτωση να βρεθεί ο αντίστροφος.

δ) Να βρεθεί η παράταση του T ως προς την βάση $B=\{\mathbf{u}_1=(1,0,1),\ \mathbf{u}_2=(0,1,1),\ \mathbf{u}_3=(1,1,1)$

(2,5)

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2012

B

1) α) Αν **v** ένα στοιχείο ενός διαν. χώρου V[F] με εσωτερικό γινόμενο, να αποδειχθεί ότι το σύνολο $W=\{\mathbf{u}\in V \ / \ \langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle=0\}$ είναι διαν. υπόχωρος του V.

β) Έστω C[-1,1] ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα [-1,1]. Να αποδειχθεί ότι για $f,g\in C[-1,1]$ η σχέση :

$\langle f|g\rangle=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)f(x)g(x)dx$ ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο C[-1,1] και να επαληθευτεί η ανισότητα του Schwarz στην περίπτωση όπου $f(x)=x$ και $g(x)=x^3$. ***(2)***

2) Δίνεται ο διαν. υπόχωρος $V=\{(x,y,z,w) \ / \ y+z+w=0\}$ του R^4. Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του V. ***(2)***

3) Δίνεται ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ με $x\in\mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ο πίνακας αυτός είναι διαγωνοποιήσιμος. ***(2)***

4) Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις ορίζουν γραμμικούς μετασχηματισμούς και σε ποιους χώρους και γιατί;

Α) T(x,y)=(x+1, 3y, y-x) Β) T(x,y)=(|x|,0) Γ) T(x,y)=(xy,y) Δ) T(x,y,z)=(z,x,y)

Ε) T(x,y)=(cosx, siny) ***(1,5)***

5) Δίνεται ο μετασχηματισμός $T: R^3 \to R^3$ που ορίζεται από τη σχέση:

T(x,y,z)=(2y, x-z, -x+y+2z)

α) Να αποδειχθεί ότι ο T είναι γραμμικός.

β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του T.

γ) Ελέγξτε εάν ο T είναι αντιστρέψιμος και σε θετική περίπτωση να βρεθεί ο αντίστροφος.

δ) Να βρεθεί η παράταση του T ως προς την βάση $B=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,1,1),\ u_3=(1,0,1))$

(2,5)