ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟΝ "ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ" 17.6.1998

Απαντήστε σε 8 θέματα

1. Αν $f,g:[a,\beta]\to IR$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ ώστε $g(\xi)\int_a^\beta f(t)dt = f(\xi)\int_a^\beta g(t)dt$.

2. Εστω $f:(a\beta)\to IR$ δύο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση και $\xi\in(a,\beta)$. i) Αν το ξ είναι σημείο καμπής της f, αποδείξτε ότι $f''(\xi)=0$. ii)Εξετάστε αν η συνθήκη $f''(\xi)=0$ είναι ικανή ώστε το ξ να είναι σημείο καμπής της f.

3. α) Εστω $f:(0,+\infty)\to IR$ κοίλη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_1,\dots,x_n\in(0,+\infty)$ και $t_1,\dots,t_n\in[0,+\infty)$ με $\sum_{i=1}^n t_i=1$ ισχύει: $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right)\ge\sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$ β) Χρησιμοποιώντας το α), αποδείξτε ότι αν $a_1,\dots a_n>0$ και $t_1,\dots,t_n\ge 0$, τότε $a_1^{t_1}a_2^{t_2}\dots a_n^{t_n}\le t_1a_1+t_2a_2+\dots+t_na_n$ μι $\sum_{i=1}^{n} t_i=1$

4. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^1 x^2$ το ξ ημxdx.

5. Εστω $f:IR\to IR$ διαφορίσιμη συνάρτηση, ώστε $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=a\in I\widetilde{R}$.

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=a$. [Υποδ. Χρησιμοποιείστε τη συνάρτηση $f(x)e^x$]

6. α) Εστω ακολουθία $\{a_n\}$ ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Αν επί πλέον η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι φθίνουσα, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}(na_n)=0$.

β) Εστω ακολουθία $\{\beta_n\}$ με $\beta_n\ge 0$ για κάθε $\nu=1,2,\dots$, ώστε $\sum_{n=1}^\infty\beta_n<+\infty$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^\infty\frac{\sqrt{\beta_n}}{n}<+\infty$.

7. Υπολογίστε την ακτίνα συγκλίσεως R της δυναμοσειράς $f(x)=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}$, και αποδείξτε ότι για κάθε $x,y\in(-R,R)$ ισχύουν: i) $f(x+y)=f(x).f(y)$

ii) $f(x)=e^x$, όπου $e=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}$ [Υποδ. Για το i) μπορείται να χρησιμοποιείτε το θεώρημα Mertens].

iii) Αποδείξτε ότι η σύγκλιση της δυναμοσειράς δεν είναι ομοιόμορφη στο $(-R,R)$.

8. Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 τη συνάρτηση $\log(1+x)$ $\quad -1<x\le 1$

9. Εστω $r_1,r_2,\dots$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ \ x\in\{r_1,\dots r_n\}\\ 0 & \alpha\nu\ \ x\in[0,1]\setminus\{r_1,\dots,r_n\}\end{cases}$ $\quad n=1,2,\dots$

Αποδείξτε τα εξής: i) Η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ x\in[0,1]\cap Q\\ 0 & \alpha\nu\ x\in[0,1]\setminus Q\end{cases}$

ii) Κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη

iii) Η f δεν είναι ολοκληρώσιμη. iv) Η $\{f_n\}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

10) Εξετάστε αν η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^\infty(xe^{-x})^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.