ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΟΥΝΙΟΣ 1997

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 1996-97

Β. ΔΟΥΓΑΛΗΣ - Σ. ΝΟΤΑΡΗΣ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1ης ΠΕΡΙΟΔΟΥ

(Η βαθμολογική αξία κάθε ερωτήματος σε παρένθεση. Σύνολο μονάδων = 100)

1. **Σφάλματα στρογγύλευσης**

   (α) Δείξτε ότι η ακολουθία $y_k = 2^k \tan \dfrac{\pi}{2^k}$, $k = 2, 3, 4, \ldots$, συγκλίνει στο π. (3)

   (β) Δείξτε ότι η (y_k) παράγεται αναδρομικά από τον αλγόριθμο

$$\begin{cases} y_2 = 4 \\ y_{k+1} = 2^{2k+1} \dfrac{\sqrt{1 + (2^{-k} y_k)^2} - 1}{y_k}, \quad k = 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

   (6)

   (γ) Αν κάνουμε πράξεις με αριθμητική κινητής υποδιαστολής με πεπερασμένη ακρίβεια, παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος του (β) είναι ασταθής. Ποιά είναι η αιτία της αστάθειας; (5)

   (δ) Βρείτε έναν ευσταθή αλγόριθμο (που απαιτεί μόνο τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής και την εξαγωγή τεραγωνικών ριζών) για τον υπολογισμό των y_k. (4)

2. **Επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων**
   Θεωρήστε την εξίσωση $f(x) := x^3 - 3x - 1 = 0$.

   (α) Δείξτε ότι έχει τρείς πραγματικές ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. (6)

   (β) Με $x_0 = 2$ υπολογίστε τον πρώτο όρο x_1 της ακολουθίας (x_n) που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την προσέγγιση ριζών της f. Συγκλίνει η (x_n), και, αν ναι, σε ποιά από τις τρείς ρίζες; (Δικαιολογήστε την απάντηση σας με βάση την γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου του Νεύτωνα και τις ιδιότητες της f). (7)

   (γ) Υπάρχει διάστημα $[a, b]$ που να περιέχει την μικρότερη ρίζα ρ_1, τέτοιο ώστε να ισχύουν σ' αυτό οι προϋποθέσεις για την ύπαρξη και μοναδικότητα σταθερού σημείου για την επαναληπτική μέθοδο $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$, όπου $\varphi(x) = \dfrac{x^3 - 1}{3}$; Αν ναί, βρείτε ένα τέτοιο διάστημα. (7)

3. **Αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων**

   (α) Δίδεται ο τριδιαγώνιος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με διαγώνια στοιχεία α_i, $1 \leq i \leq n$, υπερδιαγώνια β_i, $1 \leq i \leq n-1$, και υποδιαγώνια γ_i, $2 \leq i \leq n$, όπου $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \neq 0$, $|\alpha_1| > |\beta_1|$, $|\alpha_n| > |\gamma_n|$ και $|\alpha_i| \geq |\beta_i| + |\gamma_i|$, $2 \leq i \leq n-1$. Δίδονται επίσης τα διανύσματα $u, v, w \in \mathbf{R}^n$. Πώς θα υπολογίσετε το διάνυσμα $x = u^T A^{-1} v + u^T A^{-1} w$ με όσο το δυνατόν λιγότερες πράξεις και θέσεις μνήμης; (11)

(β) Εστω $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ η ακριβής λύση του συστήματος $Ax = b$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος πίνακας και $b \in \mathbb{R}^n$. Εστω $\tilde{x}$ μία προσέγγιση του x και $r = A\tilde{x} - b$ το υπόλοιπό της. Δείξτε ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\frac{1}{k(A)}\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq k(A)\,\frac{\|r\|}{\|b\|},$$

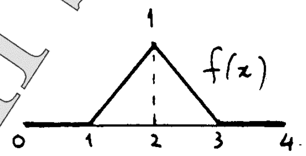
όπου $k(A)$ ο δείκτης κατάστασης του A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$. (11)

4. **Παρεμβολή**

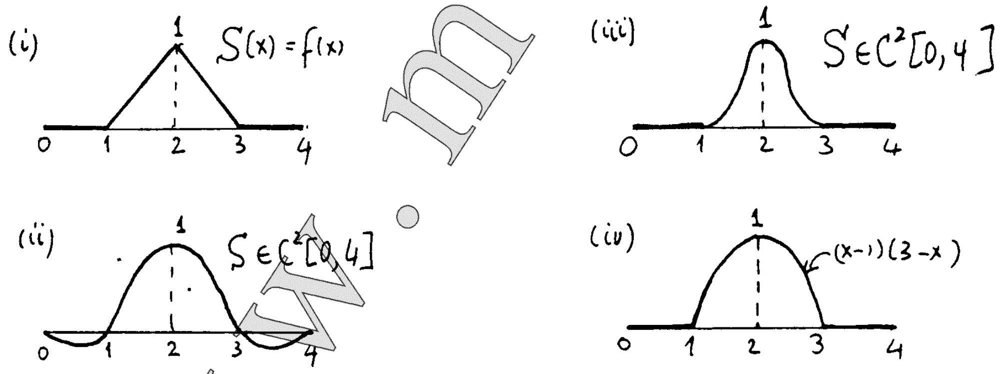
(α) Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής $p \in \mathbb{P}_2$ που παρεμβάλλεται στις τιμές της $f(x) := \ln x$ στα σημεία 2, 3 και 4, και δείξτε ότι αν $\varepsilon(x) := f(x) - p(x)$, τότε $-\frac{1}{64} \leq \varepsilon(3.5) \leq -\frac{1}{512}$. (11)

(β) Θεωρήστε την συνάρτηση $f : [0,4] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} x - 1 & \text{αν } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & \text{αν } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$



Εστω S η κυβική spline παρεμβολής της f στα σημεία $x_i = i$, $0 \leq i \leq 4$ με συνοριακές συνθήκες δευτέρων παραγώγων στα άκρα 0 και 4. Μία από τις παρακάτω είναι η σωστή γραφική παράσταση της $S(x)$. Προσδιορίστε την, δικαιολογώντας πλήρως την απόρριψη των υπολοίπων. (11)



5. **Αριθμητική ολοκλήρωση**

(α) Βρείτε τον αριθμό των υποδιαστημάτων που απαιτούνται για να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6} χρησιμοποιώντας τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου με ομοιόμορφο διαμερισμό. (10)

(β) Υπολογίστε τα βάρη w_1, w_2, w_3 στον τύπο των Newton–Cotes

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq w_1 f\left(-\frac{1}{2}\right) + w_2 f(0) + w_3 f\left(\frac{1}{2}\right).$$

(8)