Εξετάσεις περιόδου Ιανουαρίου
Μάθημα: Μαθηματικά Β΄ 25.2.2004

1. α) Υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα, ολοκληρώνοντας το ισοδύναμο ολοκλήρωμα που προκύπτει αν αντιστραφεί η σειρά ολοκλήρωσης

$$\int_0^2 \int_x^2 y^2 \sin(xy)\,dy\,dx$$

β) Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται πάνω από το επίπεδο $z = 3x + y + 6$, κάτω από το xy - επίπεδο και πλευρικά από τις επιφάνειες $y = 0$ και $y = 4 - x^2$

2. α) Σε μια αναδασωτέα περιοχή φυτεύονται κάθε χρόνο 1000 δενδρύλλια, ενώ κάθε χρόνο διαπιστώνεται ότι το 1/10 από το σύνολο των φυτευμένων δένδρων από προηγούμενες χρονιές καταστρέφεται.
i) Βρείτε τον αριθμό y_n των δένδρων της περιοχής που θα προέρχονται από την δενδροφύτευση μετά από n χρόνια.
ii) Βρείτε τον αριθμό X των δένδρων που τείνει να αποκτήσει η περιοχή με την πάροδο του χρόνου.

β) Να λυθεί η εξίσωση διαφορών $y_{n+2} + 4y_n = 1$

α) Έστω A πίνακας n × n. Δώστε τον ορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του A. Πότε ο A καλείται διαγωνοποιήσιμος;
β) Διατυπώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, συναρτήσει των ιδιοδιανυσμάτων του A, έτσι ώστε ο A να είναι διαγωνοποιήσιμος.
γ) Έστω τώρα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ο A διαγωνοποιείται; Αν ναι, να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

α) Σημειώστε στα παρακάτω Αλήθεια (Α) ή Ψέμα (Ψ):
i) Ο B είναι μη αντιστρέψιμος εάν και μόνον εάν το 0 είναι ιδιοτιμή του B.
ii) Αν ο $A \sim B$ τότε ο $A^2 - 2A + I \sim B^2 - 2B + I$
iii) Η μορφή Jordan ενός συμμετρικού πίνακα είναι πάντα ένας διαγώνιος πίνακας.
iv) Αν A είναι τέτοιος ώστε $A^2 + A + I = 0$, τότε όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μιγαδικοί (μη πραγματικοί) αριθμοί.

β) Να βρεθεί η μορφή Jordan του πίνακα

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$