Εξετάσεις περιόδου Ιουνίου 2006 για επί πτυχίω φοιτητές 11.7.2006
Εφαρμοσμένα Μαθηματικά – Μαθηματικά Β

1 (a) [5] Έστω (x,y,z) οι καρτεσιανές συντεταγμένες και (r,θ,z) οι κυλινδρικές συντεταγμένες σημείου Μ στο χώρο. Βρείτε τις σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές με τις κυλινδρικές συντεταγμένες.

(b) Βρείτε τον όγκο μεταξύ των τεμνομένων κυλίνδρων $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και $x^2 + z^2 = \alpha^2$,

i) [10] Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες.

ii) [10] Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες.

2 (a) [5] Πότε δύο λύσεις μιας εξίσωσης διαφορών λέγονται γραμμικά ανεξάρτητες. Είναι οι λύσεις n και 2n γραμμικά ανεξάρτητες ή εξαρτημένες και γιατί;

(b) [10] Να λυθεί η εξίσωση διαφορών

$$\alpha_{n+3} + 3\alpha_{n+2} + 3\alpha_{n+1} + \alpha_n = 0$$

(c) [10] Να βρεθεί μια μερική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$\alpha_{n+2} - 2\alpha_{n+1} + \alpha_n = 1 + e^n$$

3. (a) [6] Ορίστε το έργο δύναμης F κατά μήκος καμπύλης στο επίπεδο. Στη συνέχεια δώστε μια ικανή συνθήκη που αν η δύναμη F την ικανοποιεί, τότε το έργο της F κατά μήκος μίας διαδρομής που συνδέει δύο σημεία Α, Β θα είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.
(b) [19] Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης
$F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ όταν το σημείο (x, y) διαγράφει ολόκληρη την καμπύλη $x^2 + y^2 = 4$ κατά την θετική (δεξιόστροφη) φορά.

4. Έστω $f : C \rightarrow C$ μιγαδική συνάρτηση με $f = f_1 + if_2$.
(a) [5] Πότε λέγεται η f ολόμορφη βάσει του ορισμού;
Δώστε μία αναγκαία και ικανή συνθήκη βάσει των μερικών παραγώγων των f_1, f_2 ώστε η f να είναι ολόμορφη.

(b) [20] Έστω $z_0 = (x_0, y_0) \in C$ ώστε $f'(z_0) \neq 0$. Δείξτε ότι οι καμπύλες $f_1(x, y) = f_1(x_0, y_0)$ και $f_2(x, y) = f_2(x_0, y_0)$ τέμνονται κάθετα στο (x_0, y_0).