

Εξετάσεις περιόδου Σεπτεμβρίου 25.9.2006
Μαθηματικά Β και Θέματα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

1) α) Να μετατρέψετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) dy dx$$

σε ένα ισοδύναμο πολικό ολοκλήρωμα.

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{\cos y}{y} dy dx$$

αφού πρώτα αντιστρέψετε την σειρά ολοκλήρωσης.

2) α) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1$$

β) Να βρεθεί μια εξίσωση διαφορών που έχει ως γενική λύση την $c_1 + c_2 2^n + c_3 n 2^n$

3. Υπολογίστε το εμβαδόν που φράσσεται από την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

(Υπ. (i) Χρησιμοποιείτε το Θεώρημα του Green

(ii) Μια παραμέτρηση της έλλειψης είναι $x = \alpha \cos t$, $y = \beta \sin t$ $t \in [0, 2\pi]$)

4. α) Δώστε παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης η οποία είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της αλλά δεν είναι αναλυτική.

Δικαιολογήστε το παράδειγμα.

β) Έστω γ_1, γ_2 απλές κλειστές καμπύλες στο επίπεδο (αριστερόστροφα προσανατολισμένες) έστω $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική συνάρτηση και $a \in \mathbb{C}$ με $f(a) = e^{a/2}$. Υπολογίστε την διαφορά των ολοκληρωμάτων

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

για τις διάφορες θέσεις του σημείου a στο επίπεδο. Πότε η παραπάνω διαφορά γίνεται μηδέν;

5) [10] Χρησιμοποιώντας Μαθηματική Επαγωγή, δείξτε ότι $e^n > n + 1$, για κάθε $n \in \mathbf{N}$, όπου $e = 2, 78\dots$.

6) [10] α) Έστω τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες A και B . Πότε λέμε ότι οι A, B είναι όμοιοι; Πως ορίζονται οι ιδιοτιμές του A ; Είναι αλήθεια η πρόταση: “Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι εάν και μόνον εάν έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιοτιμές (μαζί με τις πολλαπλότητες τους)”; ψ

[10] β) Εξετάστε αν οι

$$A = \begin{bmatrix} -i & -i \\ i & i \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

είναι όμοιοι.

7) [5] α) Τι είναι ένα μπλόκ Jordan μεγέθους $k \times k$; Τι είναι ένας πίνακας Jordan μεγέθους $n \times n$;

[15] β) Βρείτε την κανονική μορφή Jordan του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι φοιτητές του τμήματος Αξιοποίησης Φυσικών Πόρων & Γ. Μηχανικής θα γράψουν τα θέματα 1, 2, 3, 4.

Οι φοιτητές του τμήματος Γ. Οικονομίας θα γράψουν τα θέματα 1, 2, 5, 6, 7.