Εργαστήριο Μαθηματικών & Στατιστικής

Γραπτή Εξέταση Προόδου στο <u>Α΄ Μέρος</u> του Μαθήματος <u>Στατιστική</u>
για τα Τμήματα Γ.Β. και Ε.Τ.Τ.

5/12/11

1ο Θέμα [20]. Από πρόσφατη έρευνα γνωρίζουμε ότι στο 1% των αναψυκτικών που διατίθενται στην ελληνική αγορά, η ποσότητα ενός συγκεκριμένου συντηρητικού που περιέχεται σε αυτά υπερβαίνει το ανώτατο επιτρεπτό όριο. Η μέθοδος που εφαρμόζει ο Ε.Φ.Ε.Τ. όταν πραγματοποιεί σχετικούς ελέγχους δεν είναι απολύτως ακριβής. Συγκεκριμένα: δίνει θετικό αποτέλεσμα στο 98% των αναψυκτικών που πράγματι υπερβαίνουν το όριο αλλά και στο 5% των αναψυκτικών που δεν υπερβαίνουν το όριο. **α)** Ποια είναι η πιθανότητα σε ένα τυχαία επιλεγμένο αναψυκτικό ο έλεγχος του Ε.Φ.Ε.Τ. να δώσει θετικό αποτέλεσμα. **β)** Αν σε ένα τυχαία επιλεγμένο αναψυκτικό ο έλεγχος του Ε.Φ.Ε.Τ. έδωσε θετικό αποτέλεσμα, ποια είναι η πιθανότητα η ποσότητα συντηρητικού που περιέχεται σε αυτό πράγματι να υπερβαίνει το όριο. **γ)** Το ενδεχόμενο *«Το αναψυκτικό περιέχει ποσότητα συντηρητικού που υπερβαίνει το ανώτατο επιτρεπτό όριο»* και το ενδεχόμενο *«Το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι θετικό»* είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα ή εξαρτημένα; Εξηγείστε.

2ο Θέμα [45]. Η ποσότητα ελιών που επεξεργάζεται ένα ελαιοτριβείο ανά ώρα (σε τόνους) είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή, έστω *X*. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της X δίνεται από τον τύπο,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{c}} & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{αλλού.}\end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η μέση ποσότητα ελιών που επεξεργάζεται το ελαιοτριβείο ανά ώρα είναι $E[X]=\mu=2$ τόνοι και η διασπορά $V[X]=\sigma^2=1.33$ τόνοι^2.

β) Ποια είναι η πιθανότητα η ποσότητα ελιών που επεξεργάζεται το ελαιοτριβείο σε μια ώρα να υπερβεί τους 3 τόνους.

γ) Ποια είναι η πιθανότητα το πολύ σε μία από πέντε, τυχαία επιλεγμένες, ώρες το ελαιοτριβείο να επεξεργασθεί ποσότητα που να υπερβαίνει τους 3 τόνους.

δ) Ποια είναι η πιθανότητα η **μέση** ποσότητα που επεξεργάζεται το ελαιοτριβείο σε 36, τυχαία επιλεγμένες ώρες, να είναι το πολύ 1.4 τόνοι. *(θεωρείστε ότι οι ποσότητες ελιών που επεξεργάζεται το* ελαιοτριβείο *ανά ώρα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες).*

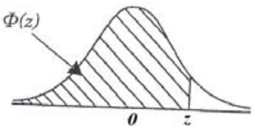
ε) Καταγράφουμε την ποσότητα ελιών που επεξεργάσθηκε το ελαιοτριβείο σε κάθε μια από 36, τυχαία επιλεγμένες, ώρες και βρίσκουμε $\bar{x}=1.4$ τόνοι. Με βάση αυτό το εύρημα στο τυχαίο δείγμα των 36 ωρών και την απάντηση στο (δ), μήπως πρέπει να αμφιβάλουμε για κάτι;

3ο Θέμα [25]. Έχει παρατηρηθεί ότι ο αριθμός X_t των σωματιδιακών προσμείξεων σε ένα υγρό σκεύασμα όγκου *t* (σε cm^3), περιγράφεται ικανοποιητικά από μια *στοχαστική διαδικασία Poisson*. Αν ο μέσος αριθμός σωματιδίων ανά cm^3 είναι 3, να υπολογισθεί η πιθανότητα, **α)** να βρεθούν **το πολύ** 2 σωματίδια σε ένα cm^3 σκευάσματος, **β)** να βρεθούν **λιγότερα** από 2 σωματίδια σε δύο cm^3 σκευάσματος και **γ)** να βρεθούν **περισσότερα** από 20 σωματίδια σε πενήντα cm^3 σκευάσματος.

4ο Θέμα [20]. α) Δείξτε γραφικά και υπολογίστε τα $z_{0.01}$ και $z_{0.99}$ *άνω ποσοστιαία σημεία* της $Z\sim N(0,1)$.

β) Έστω *A, B* δύο ($\neq \varnothing$) ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, με $B \subseteq A$. Τι μπορούμε να πούμε για τη δεσμευμένη πιθανότητα $P(A/B)$; Μπορούμε να συμπεράνουμε αν τα ενδεχόμενα αυτά είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα. Εξηγείστε.
γ) Δύο **ξένα** ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, είναι **ανεξάρτητα**, **εξαρτημένα** ή μήπως **δε μπορούμε να αποφανθούμε**; Εξηγείστε.
δ) Αν α είναι η πιθανότητα επιτυχίας και β η πιθανότητα αποτυχίας σε μια *δοκιμή Bernoulli*, τι εκφράζουν οι όροι του αναπτύγματος: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$. Αυτό το ανάπτυγμα είναι μεγαλύτερο, μικρότερο ή ίσο με 1;

Τιμές των πιθανοτήτων $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ της $N(0,1)$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7.995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996.	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998

Ενδεικτικές απαντήσεις

1^o Θέμα

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: Το αναψυκτικό περιέχει ποσότητα συντηρητικού που υπερβαίνει το ανώτατο επιτρεπτό όριο

Θ: Το αποτέλεσμα του ελέγχου είναι θετικό.

Δίνονται οι πιθανότητες: $P(A)=0.01$, $P(\Theta/A)=0.98$ και $P(\Theta/A')=0.05$

α) Ζητείται η πιθανότητα $P(\Theta)$. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(\Theta)=P(\Theta/A)\cdot P(A)+P(\Theta/A')\cdot P(A')=0.98\cdot 0.01+0.05\cdot(1-0.01)=0.0593$$

β) Ζητείται η πιθανότητα $P(A/\Theta)$. Από τον τύπο του Bayes έχουμε:

$$P(A/\Theta)=\frac{P(\Theta/A)P(A)}{P(\Theta)}=\frac{0.98\cdot 0.01}{0.0593}=0.1653.$$

γ) Είναι εξαρτημένα διότι $P(A/\Theta)=0.1653\neq P(A)=0.01$

(ή διότι $P(\Theta/A)=0.98\neq P(\Theta)=0.0593$).

2^o Θέμα

α) Πρέπει $\int_0^4 \frac{1}{c}dx=1\Rightarrow \frac{4}{c}=1\Rightarrow c=4$.

$E(X)=\int_0^4 \frac{1}{4}\cdot x dx=...=2$ τόνοι, δηλαδή, το ελαιοτριβείο αναμένεται να επεξεργάζεται 2 τόνους ελιών ανά ώρα.

$$\sigma^2=V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_0^4 x^2\frac{1}{4}dx-2^2=\frac{4}{3}=1.33 \text{ τόνοι}^2$$

β) Ζητάμε την πιθανότητα $P(X>3)=\int_3^4 \frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(4-3)=0.25$.

γ) Έστω Y ο αριθμός των ωρών από τις πέντε που επιλέξαμε, σε κάθε μία από τις οποίες η ποσότητα ελιών που επεξεργάσθηκε το ελαιοτριβείο υπερβαίνει τους 3 τόνους. Προφανώς $Y\sim B(5,\ 0.25)$ και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(Y\leq 1)=P(Y=0)+P(Y=1)=\binom{5}{0}\cdot(0.25)^0\cdot(0.75)^5+\binom{5}{1}\cdot(0.25)^1\cdot(0.75)^4=...$$

δ) Έστω X_i η ποσότητα ελιών που επεξεργάζεται το ελαιοτριβείο την i ώρα ($i=1,2,...,36$). Προφανώς ζητάμε την πιθανότητα $P(\overline{X}\leq 1.4)$ όπου $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+...+X_{36}}{36}$. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή $\mu_i=E(X_i)=2$ τόνοι και διασπορά $\sigma_i^2=1.33$ τόνοι^2 και επομένως από το Κ.Ο.Θ. (επειδή $n=36>30$) προκύπτει ότι η $\overline{X}$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή $N(2,\ \frac{1.33}{36})$ ή $N(2,\ 0.037)$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(\overline{X}\leq 1.4)=P(Z\leq\frac{1.4-2}{\sqrt{0.037}})=P(Z\leq -3.16)=\Phi(-3.16)=1-\Phi(3.16)=0.0008.$$

ε) Πρέπει να αμφιβάλουμε για την κατανομή της X διότι θεωρώντας ότι αυτή έχει μέση τιμή 2 και διασπορά 1.33 η πιθανότητα να συμβεί στο δείγμα αυτό που παρατηρήσαμε είναι πολύ μικρή (0.0008).

3° Θέμα

Ισχύει $P(X_t = x) = e^{-3 \cdot t} \dfrac{(3 \cdot t)^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,...$

α)

$$P(X_1 \le 2) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) + P(X_1 = 2) = e^{-3}\frac{3^0}{0!} + e^{-3}\frac{3^1}{1!} + e^{-3}\frac{3^2}{2!} = \frac{17}{2}e^{-3} = ...$$

β) $P(X_2 < 2) = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) = e^{-6}\dfrac{6^0}{0!} + e^{-6}\dfrac{6^1}{1!} = 7e^{-6}$

γ) Ζητάμε την πιθανότητα: $P(X_{50} > 20)$. Επειδή η X_{50} ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $3 \cdot 50 = 150 > 10$, από το Κ.Ο.Θ. γνωρίζουμε ότι προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή $N(150, 150)$ και επομένως:

$$P(X_{50} > 20) = P(Z > \frac{20 - 150}{\sqrt{150}}) = P(Z > -10,61) = 1 - \Phi(-10.61) = \Phi(10.61) \approx 1$$

4° Θέμα

α) Εξ ορισμού $P(Z > z_\alpha) = \alpha$. Άρα,

$$P(Z > z_{0.01}) = 0.01 \Leftrightarrow 1 - P(Z \le z_{0.01}) = 0.01 \Leftrightarrow P(Z \le z_{0.01}) = 0.99 \Leftrightarrow \Phi(z_{0.01}) = 0.99$$

και με αντίστροφη αναζήτηση στον πίνακα πιθανοτήτων της τυποποιημένης κανονικής παίρνουμε $z_{0.01} = 2.33$.

$z_{0.99} = z_{1-0.01} = -z_{0.01} = -2.33$

β) $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

Προφανώς είναι εξαρτημένα.

γ) Προφανώς είναι εξαρτημένα αφού $P(A/B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(\varnothing)}{P(B)} = 0$.

δ) Εκφράζουν τις πιθανότητες των τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής X με $X \sim B(3, \alpha)$. Δηλαδή τις πιθανότητες $P(X = 3)$, $P(X = 2)$, $P(X = 1)$ και $P(X = 0)$. Το άθροισμα προφανώς είναι ίσο με 1.