

Ανάλυση II

Πρόοδος, 23 Απριλίου 2012

Θ1 Εξετάστε για τον κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς, αν είναι σωστός ή λάθος και αιτιολογείτε την απάντησή σας.

i) $\|\vec{x} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x} \cdot \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$

ii) $\vec{x} \times (\vec{b} \times \vec{y}) = (\vec{x} \times \vec{b}) \times \vec{y}$

iii) Εάν τα διανύσματα είναι διάφορα του $\vec{0}$ και κάθετα ανά δύο με $\lambda \vec{x} + \mu \vec{b} + \nu \vec{y} = \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu = \nu = 0$.

$\vec{x}, \vec{b}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$

2,5

Θ2 i) Να περιγραφεί σε δομικές συντεταγμένες το σύνολο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 = 4\}$

ii) Να περιγραφεί σε σφαιρικές συντεταγμένες το σύνολο $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$

Θ3 Για την $\vec{F}(x,y,z) = (x + yz, \cos(x^2z) + 3^{z+1})$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ να υπολογιστεί το διαφορικό στο σημείο $(1, \frac{\pi}{2}, 1)$ και ο πίνακας (Jacobi) του διαφορικού αυτού.

3,5

Θ4 Εάν $\vec{g}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ με $u = u(x,y) = x^2 - y^2$ και $v = v(x,y) = 2xy$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $h = f \circ \vec{g}$, αποδείξτε ότι

$$x \frac{\partial h}{\partial x} + y \frac{\partial h}{\partial y} = 2 \left[u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v} \right]$$

3,5

Θ* Σ/Λ
 $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Α ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και $df(\vec{p})(\vec{h}) = 0$ ($\vec{h} \in \mathbb{R}^2$) για κάθε $\vec{p} \in A$.
 Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

+2,5 για ορθή απάντηση
 -2,5 για λανθασμένη απάντηση

Καλή Επιτυχία!

Θ1	Θ2	Θ3	Θ4	ΣΥΝ.



Επιχειρηματικές Λύσεις (Από Μαρ. 30, 80, 120+130, 150: Ανάλογες)

01/ i) Συνολικό: $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$. (Ιδιότητες εβ.)

ii) Λύσεις π.χ. $\vec{a} = \vec{b} = \vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{y} = \vec{j} = (0, 1, 0)$

$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j} = (0, -1, 0)$ } δυνατότητα

$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \vec{j} = (0, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$

iii) Συνολικό $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{y} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{y} = \vec{b} \cdot \vec{y} = 0$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{y}$ κ'είναι ανά 2)
 Από, $(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{y}) \cdot (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{y}) = \vec{0} \cdot \vec{0} \Rightarrow \lambda^2(\vec{a} \cdot \vec{a}) + \mu^2(\vec{b} \cdot \vec{b}) + \nu^2(\vec{y} \cdot \vec{y}) = 0$
 $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}, \vec{b} \cdot \vec{b}, \vec{y} \cdot \vec{y} > 0$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{y} \neq \vec{0}$). Επομένως $\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$

02 i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4y\}$, $x = 2\cos\theta$, $y = 2\sin\theta$, $\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ r \geq 0, \forall y = x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0 \end{cases}$

Γίνεται $A_n = \{(2, \theta) : \theta = 4\pi\theta, \theta \in [0, \pi]\}$

ii) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0\}$

$x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, $z = \rho$, $\rho \geq 0$, $\varphi \geq 0$, $\rho \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$
 $A_z = \{(\rho, \theta, \varphi) : \rho = 1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

03 $F_1(x, y, z) = x \sin(yz)$, $dF_1(1, \frac{\pi}{2}, 1)(h_1, h_2, h_3) = (1, 0, 0) \cdot (h_1, h_2, h_3) = 1 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + 0 \cdot h_3 = h_1$
 $F_2(x, y, z) = 20 \log(x^2 z) + 3z^{2+1}$, $dF_2(1, \frac{\pi}{2}, 1)(h_1, h_2, h_3) = (1, 0, \frac{1}{2} + 9h_3) \cdot (h_1, h_2, h_3) = h_1 + (\frac{1}{2} + 9h_3)h_3$
 $d\vec{F}(1, \frac{\pi}{2}, 1)(h_1, h_2, h_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} + 9h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$, Μητρες Jacobi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} + 9h_3 \end{pmatrix}$

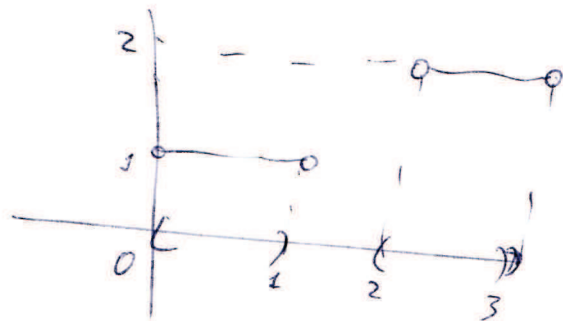
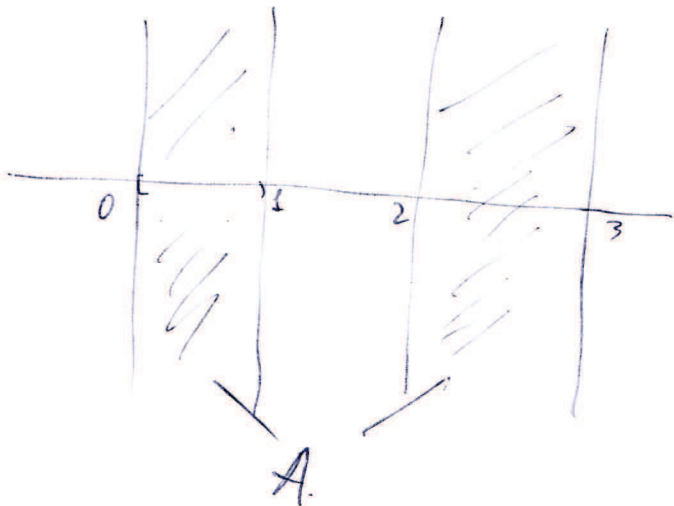
04 $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \frac{\partial f}{\partial u} + 2y \frac{\partial f}{\partial v}$
 $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = (-2y) \frac{\partial f}{\partial u} + 2x \frac{\partial f}{\partial v}$
 $x \frac{\partial h}{\partial x} + y \frac{\partial h}{\partial y} = (2x^2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2xy \frac{\partial f}{\partial v}) + (-2y^2 \frac{\partial f}{\partial u} + 2xy \frac{\partial f}{\partial v}) = 2(x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial u} + 4xy \frac{\partial f}{\partial v}$
 $= 2[u \frac{\partial f}{\partial u} + v \frac{\partial f}{\partial v}]$

θ^* Λάθος

$$\text{π.χ. } f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1), y \in \mathbb{R} \\ 2 & x \in (2,3), y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = 0h_1 + 0h_2 = 0, (h_1, h_2) \in \mathbb{R}$$

Αλλά η f δεν είναι γραμμική!



Όσοια είναι λίγη συνεί σε ∂f_x
είναι συνεί αν είναι απόλυτα τεκμηριωμένες
