ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΑΘΗΝΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2003

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ 3 ΘΕΜΑΤΑ.
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ

ΘΕΜΑ 1 (μονάδες 30)

α) Δίνεται ο πίνακας $A \in R^{nxn}$. Να αναπτύξετε την μέθοδο των δυνάμεων για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της μεγαλύτερης κατά απόλυτο τιμή ιδιοτιμής λ_1 και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος x(1) του πίνακα A στην περίπτωση που ισχύει: $|\lambda_1| > |\lambda_j|,\ j = 2(1)n$.

β) Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο της μεθόδου των δυνάμεων με κανονικοποίηση για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ με αρχικό διάνυσμα $[1,1,1]^T$, επιθυμητή ακρίβεια ε=0.1 και μέγιστο επιτρεπτό αριθμό επαναλήψεων M=2.

ΘΕΜΑ 2 (μονάδες 35)

Δίνεται τα γραμμικό σύστημα Ax=k , όπου $A \in R^{nxn}$, $x,k \in R^n$ και:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & c & d & & & & & & & & \\ b & 4 & c & d & & & & & & & \\ a & b & 4 & c & d & & & & & 0 & \\ & a & b & 4 & c & d & & & & & \\ & & a & b & 4 & c & d & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & a & b & 4 & c & d \\ & 0 & & & & & & a & b & 4 & c \\ & & & & & & & & a & b & 4 \end{pmatrix}$$

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της ε.μ. SOR για το ανωτέρω γραμμικό σύστημα λαμβάνοντας υπόψη την ειδική δομή του πίνακα A.

β) Αν θεωρήσουμε ότι είναι n=3 , a=d=s≠0 ,b=c=0 και $k=[4+s,4,4+s]^T$ τότε:
i) να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη έστι ώστε η ε.μ. Gauss-Seidel (GS) να συγκλίνει.
ii) να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $x^{(2)}$ της ε.μ. GS για s= -1.

ΘΕΜΑ 3 (μονάδες 35)
Δίνονται τα σημεία (x_i, f_i), i=0(1)2 , όπου $x_i=a+ih$, $x_2=b$ και $f_i:=f(x_i)$ οι τιμές μιας συνάρτησης $f(x) \in C^4([a,b])$.
α) Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο παρεμβολής δευτέρου βαθμού $P_2(x)$ που διέρχεται από τα παραπάνω σημεία .

β) Αν $f(x)=2x^3-1$, a= -1 , b=1 , h=1 τότε με χρήση του $P_2(x)$ να βρεθεί τύπος αριθμητικής παραγώγισης για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής (i) της f ΄(0) και (ii) της f ΄΄(0). Στη συνέχεια να βρεθεί ο τύπος του σφάλματος για την (i) περίπτωση. Σχολιάστε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

γ) Να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος: $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

i) με τον σύνθετο τύπο του τραπεζίου.
ii) με τον σύνθετο τύπο του Simpson.
Οι ανωτέρω τύποι Αριθμητικής Ολοκλήρωσης να εφαρμοστούν 2 φορές μόνο. Σχολιάστε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.