ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

14.4.2008

2η Ομάδα Ασκήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Θεωρία-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές)

3.1 Άμεσοι μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων.

3.1.1 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθεί ο A^{-1} με τη μέθοδο απαλοιφής

(i) Gauss με μερική οδήγηση

(ii) Jordan με μερική οδήγηση

β) Να υπολογιστεί ο **αριθμός συνθήκης** $\kappa(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$.

3.1.2 Δίνεται το ακόλουθο τριδιαγώνιο $n \times n$ γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} d_1 & f_1 & & & & & & & \\ e_2 & d_2 & f_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & e_k & d_k & f_k & & & & \\ & & & e_{k+1} & d_{k+1} & f_{k+1} & & & \\ & & & & e_{k+2} & d_{k+2} & f_{k+2} & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & e_{n-1} & d_{n-1} & f_{n-1} \\ & & & & & & & e_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \\ g_{k+1} \\ g_{k+2} \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (\Sigma 1)$$

α) Αν $n = 2k,\ k$ δεδομένος θετικός ακέραιος αριθμός ≥ 2, να βρεθούν οι τύποι για τον υπολογισμό των $l_i,\ r_i$ και s_i (συναρτήσει των $e_i,\ d_i,\ f_i$ και g_i) για το μετασχηματισμό του συστήματος (1) στο ακόλουθο ισοδύναμο :

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & r_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 0 & 1 & r_k & & & & \\ & & & l_{k+1} & 1 & 0 & & & \\ & & & & l_{k+2} & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & l_{n-1} & 1 & 0 \\ & & & & & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \\ s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{bmatrix} \qquad (\Sigma 2)$$

β) Να δοθεί αλγόριθμος (σε μορφή ψευδοκώδικα) για την υλοποίηση του ανωτέρω μετασχηματισμού (Σ1) $\Longrightarrow$ (Σ2).

3.2 Επαναληπτικές μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων.

3.2.1 Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $\begin{bmatrix} 4 & k & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & k & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k \in R$

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων των επαναληπτικών μεθόδων **(i) Jacobi(J)** και **(ii) Gauss-Seidel (GS)** για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.

β) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη (διάστημα τιμών του k) έτσι ώστε η ε.μ. **GS** να συγκλίνει.

γ) Για $k = 1$ και $\mathbf{x}^{(0)} = (-4, 0, 4)^T$ να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{x}^{(2)}$ της λύσης του ανωτέρω γραμμικού συστήματος με την ε.μ. **(i) J** και **(ii) GS**.

3.2.2 Να βρεθούν οι τύποι για την αριθμητική επίλυση του γραμμικού συστήματος (Σ2) στο 3.1.2α με την επαναληπτική μέθοδο **SOR** και στην συνέχεια να δοθεί αλγόριθμος (σε μορφή ψευδοκώδικα) για την επίλυσή του, λαμβάνοντας υπόψη την *ειδική δομή* του πίνακα.

3.3 Αριθμητικός Υπολογισμός των Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα με τη μέθοδο των δυνάμεων.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$. Εφαρμόστε δύο βήματα του αλγορίθμου της κανονικοποιημένης **μεθόδου των δυνάμεων** για την εύρεση προσεγγιστικής τιμής της μέγιστης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος του πίνακα $\mathbf{A}$. Λάβετε ως αρχικό διάνυσμα το $[1, 1, 1]^T$ και επιθυμητή ακρίβεια $\epsilon = 0.0001$.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Υλοποίηση Αλγορίθμων - Αποτελέσματα)

Προσοχή: *Η ένδειξη * πριν από κάποιο ερώτημα σημαίνει ότι το αντίστοιχο ερώτημα είναι* **προαιρετικό**. *Τα προαιρετικά ερωτήματα θα ληφθούν υπόψη θετικά στην τελική βαθμολογία, χωρίς αυτό να σημαίνει κάποια μείωση για όσους δεν απαντήσουν σε αυτά.*

4.1 Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος και υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πίνακα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \ \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n},\mathbf{n}}, \ \mathbf{x} = (x_i), \ \mathbf{b} = (b_i) \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$,
όπου ο $\mathbf{A}$ είναι μεγάλος και πυκνός πίνακας.

4.1.1 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα C (ή C++) τον αλγόριθμο της μεθόδου **Jordan με μερική οδήγηση** για την επίλυση του γραμμικού συστήματος και να εκτιμηθεί το σχετικό σφάλμα της λύσης $\mathbf{x}$ με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

α) $\dfrac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$, όπου $||\delta\mathbf{x}||_\infty = ||\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}||_\infty$ το απόλυτο σφάλμα

* **β)** $\dfrac{||\delta\mathbf{r}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$, όπου $||\delta\mathbf{r}||_\infty = ||\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}||_\infty$ το υπόλοιπο

και $\hat{\mathbf{x}}$: η υπολογιζόμενη λύση από την εφαρμογή του αλγορίθμου.

Υπόδειξη : Για πειραματικούς λόγους συνήθως δίνεται το διάνυσμα $\mathbf{x}$ (ως προκαθοριζόμενη λύση) και στη συνέχεια υπολογίζεται το $\mathbf{b} = \mathbf{A} * \mathbf{x}$. (Για παράδειγμα, αν $\mathbf{x} = (1, 1, \cdots, 1)^T$, τότε $\mathbf{b}_i = (\mathbf{A} * \mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$).

4.1.2 Με κατάλληλη τροποποίηση του προγράμματος που χρησιμοποιήσατε στο 4.1.1

α) να υπολογίσετε τον αντίστροφο $\mathbf{A}^{-1}$ του πίνακα $\mathbf{A}$

* **β)** να υπολογίσετε τον **αριθμό συνθήκης**: $\kappa(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_\infty ||\mathbf{A}^{-1}||_\infty$.

Τα προγραμματά σας σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις πρέπει να δίνουν στο χρήστη τις ακόλουθες δυνατότητες επιλογής :

(i) να εισάγει τα απαραίτητα δεδομένα

(ii) να δημιουργεί ένα συγκεκριμένο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια τύπων)

***(iii)** να δημιουργεί ένα τυχαίο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια της συνάρτησης rand για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών)

4.1.3 Στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας
(βλ. παρακάτω πίνακα 4.1). Συμπεράσματα – Αιτιολογήσεις.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1 : $\quad \mathbf{n} = \mathbf{4}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

Για την πειραματική επαλήθευση στο **4.1.1** θεωρήστε ότι η λύση του γρ. συστήματος είναι η
$\mathbf{x} = (1,\ -2,\ 2,\ -1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **4.1.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Εφαρμογή 2 : $\quad \mathbf{n} = \mathbf{8}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & 3 & 10 & -3 & 3 & 3 & -4 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 3 & -12 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -13 & -1 & 1 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 12 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 3 & -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

Για την πειραματική επαλήθευση στο **4.1.1** θεωρήστε ότι η λύση του γρ. συστήματος είναι η
$\mathbf{x} = (-1,\ 1,\ -1,\ 1\ -1,\ 1\ -1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **4.1.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Εφαρμογή 3 : $\quad \mathbf{n} = \mathbf{10}, \qquad \mathbf{A} = (a_{ij}) = \dfrac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$

όπου προκαθορίζετε εκ των προτέρων τη λύση (παρόμοια με την εφαρμογή 2).

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **4.1.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Αποτελέσματα

Πίνακας 4.1

Επίλυση του $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ και υπολογισμός του A^{-1} (μέθοδος Jordan)			
Εφαρμογή	**Σχ. Σφάλμα** $\dfrac{\|\|\delta\mathbf{x}\|\|_\infty}{\|\|\mathbf{x}\|\|_\infty}$	***Σχ. Υπόλοιπο** $\dfrac{\|\|\delta\mathbf{r}\|\|_\infty}{\|\|\mathbf{x}\|\|_\infty}$	***Αριθμός Συνθήκης** $\kappa(A)$
1		*	*
2		*	*
3		*	*

4.2 Αριθμητικός Υπολογισμός των Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα με την αντίστροφο μέθοδο των δυνάμεων (με μετατόπιση q).

Δίνεται ο πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbf{R^{n,n}}$, ο οποίος έχει τις πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_i, \ \ i = 1(1)n$
(με $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots > |\lambda_n|$) και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}^{(i)}, \ \ i = 1(1)n$.

Να υλοποιήσετε σε γλώσσα C (ή C++) τον αλγόριθμο της **αντιστρόφου μεθόδου των δυνάμεων (με μετατόπιση** q, όπου $q \neq \lambda_i$) για την εύρεση προσεγγιστικής τιμής της μέγιστης και της ελάχιστης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής και των αντιστοίχων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $\mathbf{A}$.

Υπόδειξη : Για ανωτέρω υλοποίηση χρησιμοποιήσατε τον αλγόριθμο της κανονικοποιημένης **μεθόδου των δυνάμεων** αντικαθιστώντας στον ρόλο του πίνακα $\mathbf{A}$ τον πίνακα $(\mathbf{A} - q\mathbf{I})^{-1}$.

Για την εύρεση του αντιστρόφου πίνακα $(\mathbf{A} - q\mathbf{I})^{-1}$ να χρησιμοποιήσετε τον αλγόριθμο της μεθόδου **Jordan** που υλοποιήσατε στο 4.1.2.

Ως δεδομένα θα δίνονται το αρχικό διάνυσμα, η επιθυμητή ακρίβεια ϵ, η τιμή του q και ο μέγιστος επιτρεπτός αριθμός επαναλήψεων maxiter.

Στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας (βλ. παρακάτω πίνακες 4.2.1.α, 4.2.1.β, 4.2.2.α, 4.2.2.β). Συμπεράσματα – Αιτιολογήσεις.

Εφαρμογές - Αποτελέσματα

Εφαρμογή 4.2.1 : $\quad \mathbf{n = 3}, \qquad A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 6, \ \ \lambda_2 = 4, \ \ \lambda_3 = 1$
Ιδιοδιανύσματα : $\mathbf{x}^{(1)} = [1, \ 1, \ 1]^T, \quad x_2 = [0, \ 1, \ 1]^T, \quad x_3 = [1, \ 0, \ 1]^T$

Λάβετε $q = 5.5, \ 5.6, \ 5.7, \ 5.8$ για την προσέγγιση των $(\lambda_1, \ \mathbf{x}^{(1)})$ και $q = 1.5, \ 1.4, \ 1.3, \ 1.2$ για την προσέγγιση των $(\lambda_3, \ \mathbf{x}^{(3)})$.

Πίνακας 4.2.1.α

Υπολογισμός των $(\lambda_1, \ \mathbf{x}^{(1)})$ (αντίστροφος μέθοδος των δυνάμεων)			
Μεταβλητή μετατόπισης q	**Αριθμός επαναλήψεων** itcount	**Μέγιστη Ιδιοτιμή** λ_1	**Ιδιοδιάνυσμα** $\mathbf{x^{(1)}}$
5.5			
5.6			
5.7			
5.8			

Πίνακας 4.2.1.β

Υπολογισμός των $(\lambda_3, \ \mathbf{x}^{(3)})$ (αντίστροφος μέθοδος των δυνάμεων)			
Μεταβλητή μετατόπισης q	**Αριθμός επαναλήψεων** itcount	**Ελάχιστη Ιδιοτιμή** λ_3	**Ιδιοδιάνυσμα** $\mathbf{x^{(3)}}$
1.5			
1.4			
1.3			
1.2			

Εφαρμογή 4.2.2 : $\mathbf{n = 4}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -12 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $q = 3,\ 10,\ 15$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 15.3173,\ \ \lambda_2 = -11.5142,\ \ \lambda_3 = -4.1085,\ \ \lambda_4 = 3.3053$

Ιδιοδιανύσματα : $x_1 = [-0.9962,\ -0.0712,\ 0.0486,\ 0.0137]^T,\quad x_2 = [0.2809,\ 0.9512,\ -0.0998,\ 0.0793]^T,$
$x_3 = [-0.0383,\ 0.1119,\ 0.9599,\ -0.2543]^T,\quad x_4 = [-0.1032,\ -0.0038,\ 0.1482,\ 0.9835]^T$

Λάβετε $q = 14.7,\ 14.8,\ 14.9,\ 15$ για την προσέγγιση των $(\lambda_1,\ \mathbf{x}^{(1)})$ και $q = 3.8,\ 3.7,\ 3.6,\ 3.5$ για την προσέγγιση των $(\lambda_4,\ \mathbf{x}^{(4)})$.

Πίνακας 4.2.2.α

Υπολογισμός των $(\lambda_1,\ \mathrm{x}^{(1)})$ (αντίστροφος μέθοδος των δυνάμεων)			
Μεταβλητή μετατόπισης q	**Αριθμός επαναλήψεων** itcount	**Μέγιστη Ιδιοτιμή** λ_1	**Ιδιοδιάνυσμα** $\mathbf{x}^{(\mathbf{1})}$
14.7			
14.8			
14.9			
15			

Πίνακας 4.2.2.β

Υπολογισμός των $(\lambda_4,\ \mathrm{x}^{(3)})$ (αντίστροφος μέθοδος των δυνάμεων)			
Μεταβλητή μετατόπισης q	**Αριθμός επαναλήψεων** itcount	**Ελάχιστη Ιδιοτιμή** λ_4	**Ιδιοδιάνυσμα** $\mathbf{x}^{(\mathbf{4})}$
3.8			
3.7			
3.6			
3.5			

Στις ανωτέρω εφαρμογές λάβετε ως αρχικό διάνυσμα το $[1, 1, 1]^T$ και επιθυμητή ακρίβεια $\epsilon = \dfrac{1}{2}10^{-6}$.

Οδηγίες για την παράδοση της 2ης Ομάδας Ασκήσεων

Σημείωση : Όλες οι υλοποιήσεις των ασκήσεων να γίνουν σε C (ή C++).

Υπόδειξη : Για λόγους εξοικονόμησης χρόνου και ανάπτυξης πνεύματος εποικοδομητικής συνεργασίας η εργασία συνιστάται να γίνει από δύο άτομα (**αποκλείεται** η συνεργασία περισσοτέρων των δύο ατόμων). Οι ομάδες αυτές θα παραμείνουν οι ίδιες όπως και στην 1η Ομάδα Ασκήσεων.

Προσοχή: *Η ένδειξη* * *πριν από κάποιο ερώτημα σημαίνει ότι το αντίστοιχο ερώτημα είναι* **προαιρετικό**. *Τα προαιρετικά ερωτήματα θα ληφθούν υπόψη θετικά στην τελική βαθμολογία, χωρίς αυτό να σημαίνει κάποια μείωση για όσους δεν απαντήσουν σε αυτά.*

Καταληκτικές ημερομηνίες:

Η **2η Ομάδα Ασκήσεων** θα παραδοθεί ως εξής :

Η **ΑΣΚΗΣΗ 3** θα παραδοθεί σε φάκελο (1 φάκελος ανά ομάδα) στον οποίο θα αναγράφετε εξωτερικά (Α.Μ. και Ονοματεπώνυμα) και θα περιέχει συμπληρωμένο το *''Φύλλο ερωτήσεων και απαντήσεων''*.

Χρησιμοποιήστε ένα αντίγραφο από το έντυπο (βλ. παρακάτω) και συμπληρώστε τις απαντήσεις σας όπως διευκολύνεστε (χειρόγραφα ή ηλεκτρονικά).

Η υποβολή θα γίνει στο γραφείο της Γραμματείας του Α' Τομέα (κ. Γ. Κουνιάς) την **Τετάρτη 14.5.2008** και **ώρα 12-4**.

Η **ΑΣΚΗΣΗ 4** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά (με e-mail) στην ηλεκτρονική διεύθυνση: **ARANALYSH@di.uoa.gr** από **Τετάρτη 21.5.2008** μέχρι και τη **Παρασκευή 23.5.2008** και **ώρα 20:00**.

Η **ΑΣΚΗΣΗ 4** θα πρέπει να περιλαμβάνει:

1. τα αρχεία με όνομα ask4_**method_i** (.c ή .cpp) που το καθένα θα περιέχει μόνο τον πηγαίο (source) κώδικα για την αντίστοιχη μέθοδο [όπου **method** το όνομα της μεθόδου (δηλ. **J** ή **J_INV** ή **INV_POW**) και **i** η ένδειξη του ερωτήματος (δηλ. **4.1.1** ή **4.1.2** ή **4.2**)] και

2. ένα μόνο αρχείο κειμένου με όνομα ask4_apotel (.doc σε word) για την περιγραφή των αλγορίθμων, την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και συμπερασμάτων σας.

Στο μήνυμά σας(e_mail) το θέμα (subject) θα είναι μόνο : τα ονοματεπώνυμα, οι ΑΜ της ομάδας (π.χ. Παναγιώτου Γ. 200400158, Πέτρου Φ. 200300291).

Επίσης στο μήνυμά σας(e_mail) πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο με winzip) με όνομα ASK4_xxxxxxx.zip, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. του ενός από τα μέλη της ομάδας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχονται τα αρχεία με τον πηγαίο(source) κώδικα (και όχι εκτελέσιμα αρχεία) και το αρχείο κειμένου με την ανάλυση.

Προσοχή: Είναι απαραίτητο στην αρχή του κάθε αρχείου (κώδικα και κειμένου) να αναγράφετε τα ονοματεπώνυμα και τους ΑΜ της ομάδας σας.

Όροι αποδοχής της 2ης Ομάδας Ασκήσεων

Για να γίνει αποδεκτή για αξιολόγηση η εργασία σας θα πρέπει να περιλαμβάνει τα ακόλουθα, διαφορετικά θα απορρίπτεται ως μη αποδεκτή:

- Η καθεμία από τις Ασκήσεις 3 και 4 να παραδοθεί εμπρόθεσμα σύμφωνα με τις προαναφερόμενες καταληκτικές ημερομηνίες.

- Σε κάθε συνημμένο αρχείο να γράφετε τα ονόματα της ομάδας (σαν σχόλιο στον κώδικα).

- Το αρχείο κειμένου (στην Άσκηση 4) εκτός από τα ονόματα της ομάδας θα περιέχει τα ακόλουθα:

  (i) *Εκφώνηση άσκησης* (έτοιμο αντίγραφο της εκφώνησης)

  (ii) *Ανάλυση Σχεδιασμός* : Στην ενότητα αυτή θα περιγράψετε σύντομα τη μέθοδο λύσης του προβλήματος.

  (iii) *Αλγόριθμος*: Με βάση την ανάλυση-σχεδιασμό στο **(ii)** θα δώσετε τον αλγόριθμο της μεθόδου επίλυσης του προβλήματός σας.

  (iv) *Υλοποίηση*: Παρουσίαση του κώδικα

  (v) *Αποτελέσματα* : Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσετε τα αποτελέσματα (και τα δεδομένα) για τρία τουλάχιστον τρεξίματα του προγράμματός σας με διαφορετικά δεδομένα το καθένα.

  (vi) *Σχολιασμός*: Σχολιασμός των αποτελεσμάτων με βάση τη θεωρία.

ΠΡΟΣΟΧΗ

1. Σε περίπτωση αντιγραφής ή όμοιου κώδικα συνεπάγεται μηδενική βαθμολογία.

2. Η κάθε άσκηση θα πρέπει να λύνεται με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.

3. Επίσης, θα λαμβάνεται κυρίως υπόψη η αποτελεσματικότητα της μεθόδου που χρησιμοποιείται με βάση την ύλη που έχετε διδαχθεί.

4. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης καμία από τις ασκήσεις δεν θα γίνεται δεκτή.

5. Η αποστολή μηνύματος σε άλλη διεύθυνση, εκτός αυτής που προαναφέρεται, θα καταστήσει το μήνυμα απορριπτέο χωρίς την ενημέρωσή σας.

6. Λόγω της ηλεκτρονικής αποστολής της Άσκησης 4 δεν θα γίνεται καμία δικαιολογία αποδεκτή για την μη αποστολή της εντός της προθεσμίας.

7. Ο κώδικάς σας θα πρέπει να τρέχει στον μεταγλωττιστή της C (ή C++) του εργαστηρίου των PC,s.

8. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στο e-class) του μαθήματος και να ενημερώνεστε με το σχετικό υλικό (Σημειώσεις, Διαφάνειες, Φροντιστηριακές Ασκήσεις, Ασκήσεις, Βαθμολογίες).

Φύλλο ερωτήσεων και απαντήσεων

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Θεωρία-Αλγόριθμοι-Εφαρμογές)

Α.Μ	**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ**
1.	....
2.	....

3.1 Άμεσοι μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων.

3.1.1 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθεί ο A^{-1} με τη μέθοδο απαλοιφής

(i) **Gauss** με μερική οδήγηση

(ii) **Jordan** με μερική οδήγηση

β) Να υπολογιστεί ο αριθμός συνθήκης $\kappa(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$.

3.1.2 Δίνεται το ακόλουθο τριδιαγώνιο $n \times n$ γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} d_1 & f_1 & & & & & & & \\ e_2 & d_2 & f_2 & & & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & e_k & d_k & f_k & & & & \\ & & & e_{k+1} & d_{k+1} & f_{k+1} & & & \\ & & & & e_{k+2} & d_{k+2} & f_{k+2} & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & & & e_{n-1} & d_{n-1} & f_{n-1} \\ & & & & & & & e_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_k \\ g_{k+1} \\ g_{k+2} \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \qquad (\Sigma 1)$$

α) Αν $n = 2k$, k δεδομένος θετικός ακέραιος αριθμός ≥ 2, να βρεθούν οι τύποι για τον υπολογισμό των l_i, r_i και s_i (συναρτήσει των e_i, d_i, f_i και g_i) για το μετασχηματισμό του συστήματος (1) στο ακόλουθο ισοδύναμο :

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & r_2 & & & & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & 0 & 1 & r_k & & & & \\ & & & l_{k+1} & 1 & 0 & & & \\ & & & & l_{k+2} & 1 & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & & & l_{n-1} & 1 & 0 \\ & & & & & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \\ s_{k+1} \\ s_{k+2} \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{bmatrix} \qquad (\Sigma 2)$$

β) Να δοθεί αλγόριθμος (σε μορφή ψευδοκώδικα) για την υλοποίηση του ανωτέρω μετασχηματισμού (Σ1) $\Longrightarrow$ (Σ2).

3.2 Επαναληπτικές μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων.

3.2.1 Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $\begin{bmatrix} 4 & k & 0 \\ k & 2 & k \\ 0 & k & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k \in R$

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων των επαναληπτικών μεθόδων **(i) Jacobi(J)** και **(ii) Gauss-Seidel (GS)** για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.

β) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη (διάστημα τιμών του k) έτσι ώστε η ε.μ. **GS** να συγκλίνει.

γ) Για $k = 1$ και $\mathbf{x}^{(0)} = (-4, 0, 4)^T$ να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{x}^{(2)}$ της λύσης του ανωτέρω γραμμικού συστήματος με την ε.μ. **(i) J** και **(ii) GS**.

3.2.2 Να βρεθούν οι τύποι για την αριθμητική επίλυση του γραμμικού συστήματος (Σ2) στο 3.1.2α με την επαναληπτική μέθοδο **SOR** και στην συνέχεια να δοθεί αλγόριθμος (σε μορφή ψευδοκώδικα) για την επίλυσή του, λαμβάνοντας υπόψη την *ειδική δομή* του πίνακα.

3.3 Αριθμητικός Υπολογισμός των Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα με τη μέθοδο των δυνάμεων.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$. Εφαρμόστε δύο βήματα του αλγορίθμου της κανονικοποιημένης **μεθόδου των δυνάμεων** για την εύρεση προσεγγιστικής τιμής της μέγιστης κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος του πίνακα $\mathbf{A}$. Λάβετε ως αρχικό διάνυσμα το $[1, 1, 1]^T$ και επιθυμητή ακρίβεια $\epsilon = 0.0001$.