Θεμα 1: Ιουνιος 2005

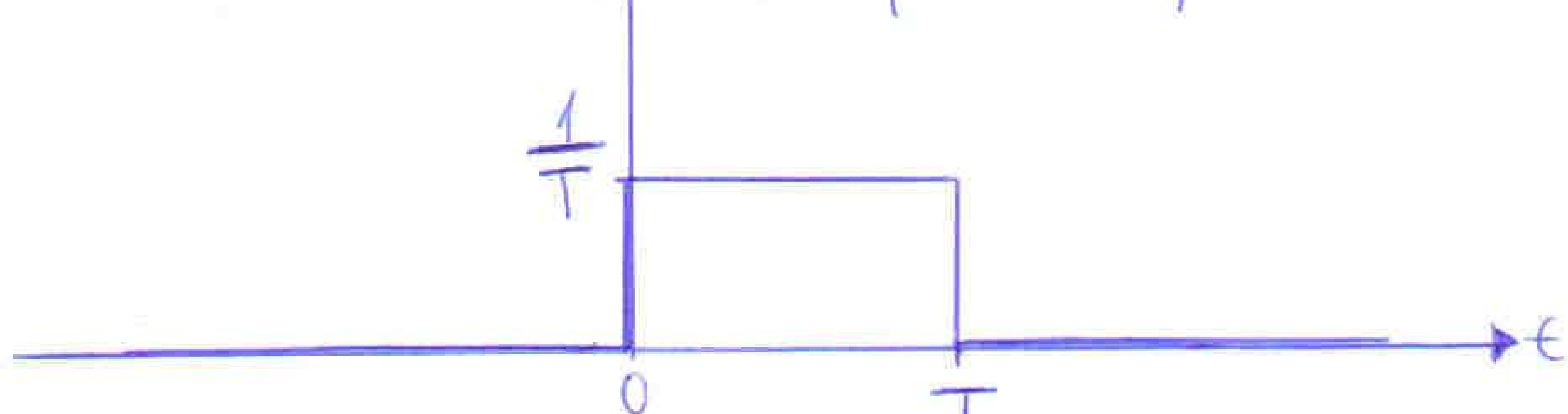
α) Η κρουστικη αποκριση ενος συστηματος ειναι η εξοδος του συστηματος οταν στην εισοδο του εφαρμοζεται η συναρτηση $\delta(t)$.
Δηλαδη:

$$\left.\begin{aligned} h(t) &= S\{\delta(t)\} = \frac{1}{T}\cdot\int_{t-T}^{t}\delta(\tau)\,d\tau \\ \text{Ομως γνωριζουμε οτι: } \quad \delta(\tau) &= \frac{du(\tau)}{d\tau} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Οποτε:}$$

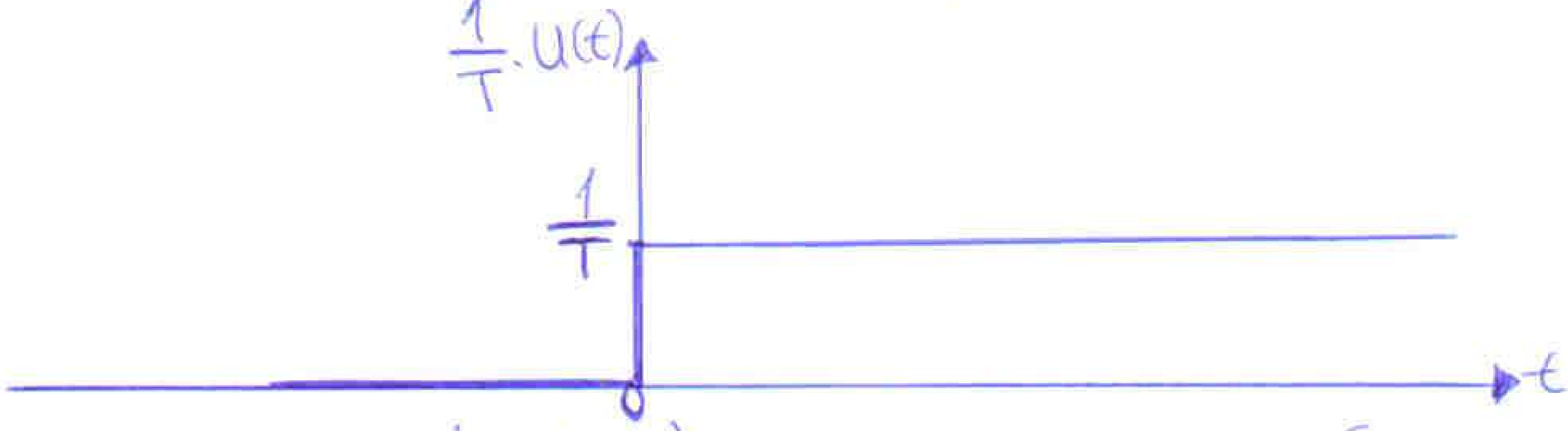
$$h(t) = \frac{1}{T}\cdot\int_{t-T}^{t}\frac{du(\tau)}{\cancel{d\tau}}\,\cancel{d\tau} = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\underbrace{[u(\tau)]'}_{1}\cdot du(\tau)$$

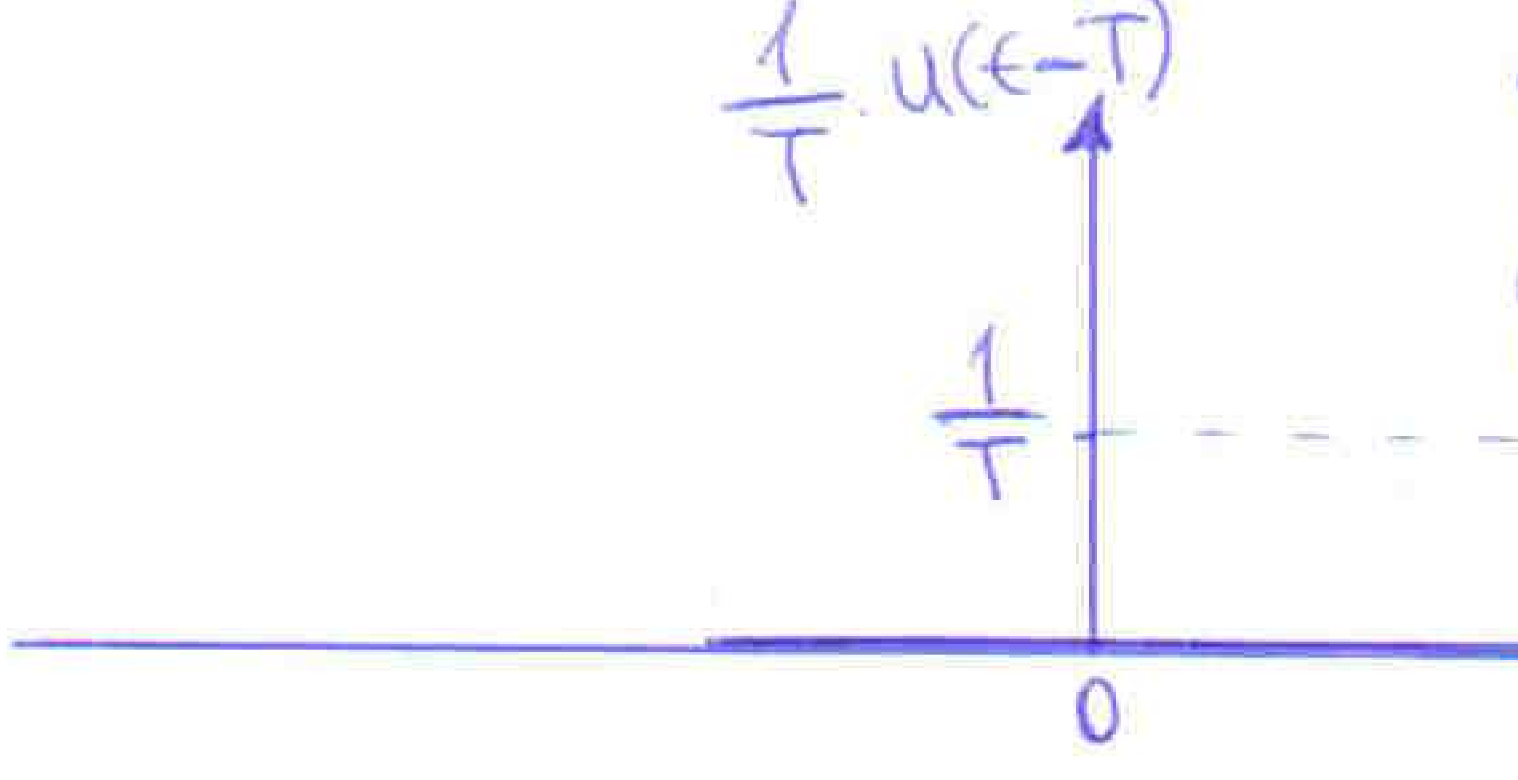
$$= \frac{1}{T}\cdot[u(\tau)]_{t-T}^{t} = \frac{1}{T}\cdot[u(t)-u(t-T)]$$

$$h(t) = \frac{1}{T}\cdot u(t) - \frac{1}{T}\cdot u(t-T)$$



αφου





αφαιρουμε τις δυο αυτες γραφικες παραστασεις οποτε προκυπτει η πρωτη

Για $t=0$ η εξοδος ειναι: $\psi(0) = 5 \cdot \cos\left(2000 \cdot \pi \cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$= 5 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5 \cdot 0 = 0$

Αρα ειναι: $\psi(0)=0$, οποτε λογω αυτου αποκλειονται τα $\psi_1(t)$, $\psi_3(t)$ και $\psi_6(t)$.

• Ετσι εμειναν ως πιθανοι εξοδοι τα $\psi_2(t)$ και $\psi_4(t)$

Για $t=10^{-3}$ η εξοδος ειναι: $\psi(10^{-3}) = 5 \cdot \cos\left(\cancel{2000}\,\pi \cdot \cancel{10^{-3}} - \frac{\pi}{2}\right)$
$= 5 \cdot \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 5 \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 5 \cdot 0 = 0$

Αρα ειναι: $\psi(10^{-3})=0$, οποτε λογω αυτου απορριπτεται το $\psi_2(t)$.

Οποτε τελικα η εξοδος του συστηματος ειναι το σημα $\psi_4(t)$.

Θεμα 7: Ιουνιος 2005

α) $x(t) = \dfrac{\sin(100 t)}{\pi t}$

Γνωριζουμε το εξης ζευγος μετασχηματισμου Fourier:

$$x(t) = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

οποτε: εδω $W=100$

$$x(t) = \frac{\sin(100 t)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 100 \\ 0, & |\omega| > 100 \end{cases} = \begin{cases} 1, & -100 < \omega < 100 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$$

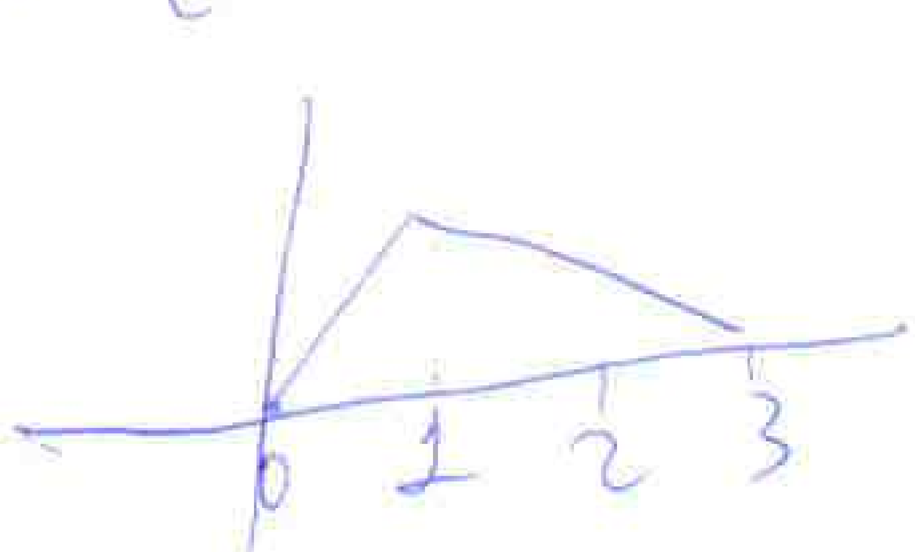
Ειναι: $\lim\limits_{\omega \to -100^+} X(\omega) = \lim\limits_{\omega \to 100^-} X(\omega) = X(0) = 1$

8ο θέμα

Η

i) πρώτα ανάκλαση και μετά συστολή στο μισό

ii) πρώτα ολίσθηση κατά ένα δεξιά και μετά ανάκλαση



iii) πρώτα διαστολή στο διπλό και μετά ανάκλαση

Οποτε: $X_1(\omega) = F\{x_1(t)\} = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega-2000)$

$+\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\delta(\omega+2000) = \pi\cdot\delta(\omega) + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\delta(\omega-2000) + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\delta(\omega+2000)$

Για $\omega=0$ ειναι: $X_1(0) = \pi\cdot\delta(0) + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\delta(-2000) + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\delta(2000)$

$$= \pi\cdot 1 + \cancel{\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 0} + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 0$$

$$= \pi$$

Για $\omega-2000=0 \Rightarrow \omega=2000$

ειναι: $X_1(2000) = \pi\cdot\delta(2000) + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\delta(2000-2000)$

$+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\delta(2000+2000) = \cancel{\pi\cdot 0} + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1 + \cancel{\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 0} = \frac{\pi}{2}$

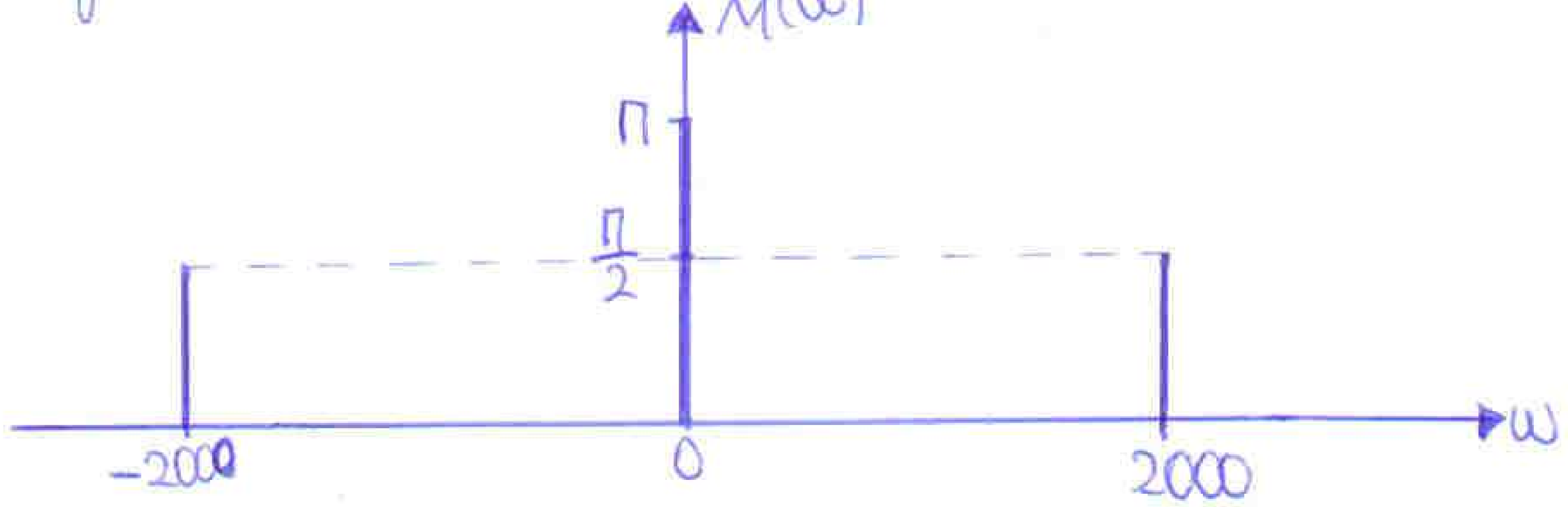
Για $\omega+2000=0 \Rightarrow \omega=-2000$ ειναι:

$X_1(-2000) = \pi\cdot\delta(-2000) + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\delta(-2000-2000) + \frac{1}{2}\pi\cdot\delta(-2000+2000)$

$$= \cancel{\pi\cdot 0} + \cancel{\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 0} + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 1 = \frac{\pi}{2}$$

και $X_1(\omega)=0$ για $\omega \neq 0, \pm 2000$

Οποτε η γραφικη παρασταση του Μ.F. του $\cos^2(1000\cdot t)$ ειναι:



β) Γνωρίζουμε οτι η αποκριση συχνοτητας $H(\omega)$ του συστηματος ειναι ο μετασχηματισμος Fourier της κρουστικης αποκρισης $h(t)$ του συστηματος, δηλαδη $H(\omega) = F\{h(t)\} = F\left\{\frac{1}{T} \cdot u(t) - \frac{1}{T} \cdot u(t-T)\right\}$

$\underset{\text{γραμμικοτητας}}{\overset{\text{λογω}}{=}} \frac{1}{T} \cdot F\{u(t)\} - \frac{1}{T} \cdot F\{u(t-T)\}$

Γνωρίζουμε οτι: $u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)$

Επισης εχουμε την ιδιοτητα της χρονικης μετατοπισης στο M.F:

$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} \cdot X(\omega)$

Οποτε: $u(t-T) \longleftrightarrow e^{-j\omega \cdot T} \cdot X(\omega) = e^{-j\omega \cdot T}\left[\frac{1}{j\omega} + \pi \cdot \delta(\omega)\right]$

εδω $t_0 = T$

$$= \frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot T} + \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot T}$$

Αρα $H(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega} + \frac{1}{T} \cdot \pi \cdot \delta(\omega) - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot T} - \frac{1}{T} \cdot \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{-j\omega T}$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega \cdot T} \cancel{+ \pi \cdot \delta(\omega)} \cancel{- \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot T}}\right]$$

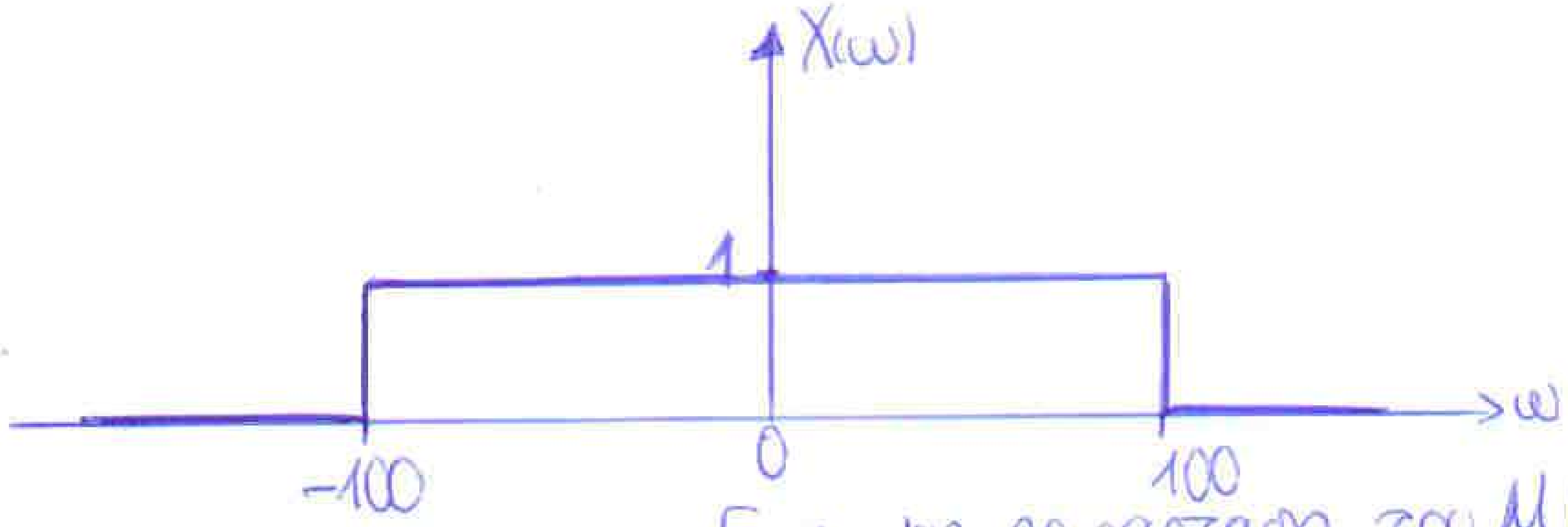
Ομως: $\delta(\omega) = 0$ για $\omega \neq 0$

οποτε για $\omega = 0$: $\pi \cdot \delta(\omega) - \pi \cdot \delta(\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot T} = \pi \cdot \delta(0) - \pi \cdot \delta(0) \cdot e^{-j 0 \cdot T}$

$= \pi \cdot 1 - \pi \cdot 1 \cdot 1 = \pi - \pi = 0$

Αρα: $H(\omega) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot (1 - e^{-j\omega T})$

Αρα:



Γραφικη παρασταση του M.F. του $x(t)$

β) Ειναι: $x_1(t)=\cos^2(1000t)$ το οποιο γραφεται λογω του τυπου του Euler

$$x_1(t)=\left(\frac{e^{j1000t}+e^{-j\cdot 1000t}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(e^{j1000t}+e^{-j\cdot 1000t}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\cdot e^{j\cdot 2000t}+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot \underbrace{e^{j\cdot 1000t}\cdot e^{-j\cdot 1000t}}_{e^0=1}+\frac{1}{4}\cdot e^{-j\cdot 2000t}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot e^{j\cdot 2000t}+\frac{1}{4}\cdot e^{-j\cdot 2000t}$$

Γνωριζουμε την ιδιοτητα της ολισθησης συχνοτητας του M.F.

$$e^{j\omega_0 t}\cdot x(t)\xleftrightarrow{F}X(\omega-\omega_0)$$

οποτε:

$$e^{j\cdot 2000t}\cdot 1\xleftrightarrow{F}X(\omega-2000)=2\pi\cdot\delta(\omega-2000)$$

εδω $\omega_0=2000$ και $x(t)=1$

$$e^{-j\cdot 2000t}\cdot 1\xleftrightarrow{F}X(\omega-(-2000))=X(\omega+2000)=2\pi\delta(\omega+2000)$$

εδω $\omega_0=-2000$ και $x(t)=1$

$$\frac{1}{2}\xleftrightarrow{F}\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi\cdot\delta(\omega)=\pi\cdot\delta(\omega)$$

Θεμα 2: Ιουνιος 2005

Ειναι: $E_X = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 . dt = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{+T} |2 . e^{-t} . u(t)|^2 . dt$

το απολυτο φευγει αφου η ποσοτητα εντος αυτου ειναι θετικη

$= \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{+T} \left(2 \, e^{-t} . u(t)\right)^2 . dt = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{+T} 4 . e^{-2t} . u(t) . dt$

$= \lim_{T\to+\infty} \int_{0}^{+T} 4 . e^{-2t} . dt = \lim_{T\to+\infty} 4 . \left(-\frac{1}{2}\right) \int_{0}^{+T} \left(e^{-2t}\right)' . dt$

λογω της u(t)

$= \lim_{T\to+\infty} (-2) . \left[e^{-2t}\right]_{0}^{+T} = \lim_{T\to+\infty} (-2) \left(\cancel{e^{-2.T}}^{\,0} - e^{-2.0}\right)$

$= (-2) . (0-1) = (-2) . (-1) = 2$

Ειναι: $\lim_{T\to+\infty} e^{-2.T} = e^{-2.(+\infty)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0$

και $e^{-2.0} = e^{0} = 1$

Θεμα 3: Ιουνιος 2005

$x(t) = \left(5 + e^{-2t} . u(t)\right) . \cos(10 . t)$ το οποιο γραφεται λογω του τυπου του Euler

$x(t) = \left(5 + e^{-2t} . u(t)\right) . \frac{e^{j.10t} + e^{-j.10t}}{2}$

$= \frac{1}{2} . \left(5 + e^{-2t} . u(t)\right) . \left(e^{j.10t} + e^{-j.10t}\right)$

$= \frac{5}{2} . e^{j10t} + \frac{5}{2} . e^{-j.10t} + \frac{1}{2} . e^{j.10t} . e^{-2t} . u(t) + \frac{1}{2} . e^{-j10t} . e^{-2t} . u(t)$

$$H(s) = \frac{\Psi(s)}{X(s)} = \frac{\frac{6}{(s+1)\cdot(s+4)}}{\frac{2(s+2)}{(s+1)\cdot(s+3)}} \Rightarrow H(s) = \frac{6\cdot\cancel{(s+1)}\cdot(s+3)}{2\cdot(s+2)\cdot\cancel{(s+1)}\cdot(s+4)}$$

$$= 3\cdot\frac{s+3}{(s+2)\cdot(s+4)} = \frac{C_1}{s+2} + \frac{C_2}{s+4}$$

Ειναι: $C_1 = (s+2)\cdot H(s)\Big|_{s=-2} = \cancel{(s+2)}\cdot 3\cdot\frac{s+3}{\cancel{(s+2)}(s+4)}\Big|_{s=-2}$

$$= \frac{3\cdot(-2+3)}{-2+4} = \frac{3\cdot 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$C_2 = (s+4)\cdot H(s)\Big|_{s=-4} = \cancel{(s+4)}\cdot 3\cdot\frac{s+3}{(s+2)\cdot\cancel{(s+4)}}\Big|_{s=-4}$

$$= 3\cdot\frac{-4+3}{-4+2} = \frac{3\cdot(-1)}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Αρα η συναρτηση μεταφορας του συστηματος ειναι:

$H(s) = 3\cdot\frac{s+3}{(s+2)\cdot(s+4)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+4}$, με π.Σ. $Re\{s\} > -2$

Το πεδιο συγκλισης της H(s) πρεπει να ειναι τετοιο ωστε η τομη του με το πεδιο συγκλισης της X(s) να μας δινει το πεδιο συγκλισης της Ψ(s).

Εδω το π.Σ. της H(s) ειχε δυο δυνατες επιλογες: $Re\{s\} > -2$ ή $Re\{s\} < -2$

Ομως: αν $\underbrace{Re\{s\} < -2}_{H(s)} \cap \underbrace{Re\{s\} > -1}_{X(s)}$ δεν δινει $\underbrace{Re\{s\} > -1}_{\Psi(s)}$

Εχουμε την ιδιοτητα της ολισθησης συχνοτητας του M.F:

$$e^{j\omega_0 t} \cdot x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega-\omega_0)$$

οποτε: $$e^{j10t} \cdot 1 \xleftrightarrow{F} X(\omega-\mathbf{10}) = 2\pi \cdot \delta(\omega-10)$$

εδω $\omega_0=10$ και $x(t)=1$

$$e^{-j10t} \cdot 1 \xleftrightarrow{F} X(\omega-(-10)) = X(\omega+10) = 2\pi \cdot \delta(\omega+10)$$

εδω $\omega_0=-10$ και $x(t)=1$

$$e^{j10t} \cdot e^{-2t} \cdot u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega-10) = \frac{1}{2+j(\omega-10)}$$

εδω $\omega_0=10$ και $x(t)=e^{-2t} \cdot u(t)$

$$e^{-j10t} \cdot e^{-2t} \cdot u(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega-(-10)) = X(\omega+10) = \frac{1}{2+j(\omega+10)}$$

εδω $\omega_0=-10$ και $x(t)=e^{-2t} \cdot u(t)$

Αρα: $$X(\omega) = F\{x(t)\} = \frac{5}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \cdot \delta(\omega-10) + \frac{5}{\cancel{2}} \cancel{2}\pi \cdot \delta(\omega+10)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+j(\omega-10)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2+j(\omega+10)}$$

μεχρι εδω ολα καλα
τωρα δεν ειμαι και σιγουρος
οτι γινεται αυτη η
απαλοιφη

Ομως: $\delta(\omega-10)=0$ για $\omega-10 \neq 0 \Rightarrow \omega \neq 10$

και $\delta(\omega+10)=0$ για $\omega+10 \neq 0 \Rightarrow \omega \neq -10$

Αρα οι οροι $5 \cdot \pi \cdot \delta(\omega-10) + 5 \cdot \pi \cdot \delta(\omega+10)$ θα φυγουν απο το υπολοιπο αθροισμα

Οποτε: $$X(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2+j(\omega-10)} + \frac{1}{2+j(\omega+10)} \right)$$

Θεμα 5 Ιουνιος 2005 σελ: 1

α) Ειναι: $x(t) = \left(e^{-t} + e^{-3t}\right) . u(t) = e^{-t} . u(t) + e^{-3t} . u(t)$

Οποτέ ο μετασχηματισμος Laplace του σηματος εισοδου, δηλαδη ο $X(s)$ ειναι: $X(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s+3}$, με π.Σ. $Re\{s\} > -1$

(αφου $\pi.\Sigma_1 : Re\{s\} > -1 \overset{\text{τομη}}{\cap} \pi.\Sigma_2 : Re\{s\} > -3$ οποτε η τομη τους ειναι το π.Σ του $X(s)$).

Ειναι: $X(s) = \dfrac{s+3+s+1}{(s+1).(s+3)} = \dfrac{2s+4}{(s+1).(s+3)} = \dfrac{2.(s+2)}{(s+1).(s+3)}$, με π.Σ. $Re\{s\} > -1$

Ειναι: $y(t) = \left(2.e^{-t} - 2.e^{-4t}\right).u(t) = 2.e^{-t}.u(t) - 2.e^{-4t}.u(t)$

Οποτε ο μετασχηματισμος Laplace του σηματος εξοδου, δηλαδη ο $Y(s)$ ειναι: $Y(s) = 2.\dfrac{1}{s+1} - 2.\dfrac{1}{s+4}$, με π.Σ. $Re\{s\} > -1$

(αφου $\pi.\Sigma_1 : Re\{s\} > -1 \overset{\text{τομη}}{\cap} \pi.\Sigma_2 : Re\{s\} > -4$ οποτε η τομη τους ειναι το π.Σ. του $Y(s)$)

Ειναι: $Y(s) = \dfrac{2.(s+4) - 2.(s+1)}{(s+1).(s+4)} = \dfrac{\cancel{2s}+8-\cancel{2s}-2}{(s+1).(s+4)} = \dfrac{6}{(s+1).(s+4)}$, με π.Σ. $Re\{s\} > -1$

Οποτε συμφωνα με το θεωρημα της συνελιξης:

Θεμα 4: Ιουνιος 2005

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{9+(\omega-2)^2}$$

Γνωριζουμε το εξης ζευγος μετασχηματισμου Fourier:

$$x(t) = e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}, \text{ με } Re\{a\} > 0$$

Επισης γνωριζουμε την ιδιοτητα της ολισθησης συχνοτητας του Μ.F:

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega-\omega_0)$$

Οποτε αν εφαρμοσουμε την ιδιοτητα της ολισθησης στο παραπανω ζευγος Μ.F θα εχουμε:

$$\psi(t) = e^{j\omega_0 t} \underbrace{e^{-a|t|}}_{x(t)} \xleftrightarrow{F} X(\omega-\omega_0) = \frac{2a}{a^2+(\omega-\omega_0)^2} \overset{\Psi(\omega)}{=}, \text{ με } Re\{a\}>0$$

Οποτε: $\psi(t) =$; $\xleftrightarrow{F} \Psi(\omega) = \frac{1}{9+(\omega-2)^2} = \frac{1}{3^2+(\omega-2)^2}$

δηλαδη εδω $a=3$ και $\omega_0=2$

$$\Rightarrow \Psi(\omega) = \frac{1}{2.3} \cdot \frac{2.3}{3^2+(\omega-2)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2.3}{3^2+(\omega-2)^2}$$

Αρα: $\psi(t) = \frac{1}{6} \cdot e^{j2t} \cdot e^{-3|t|}$

Βρηκαμε οτι: $H(s) = \dfrac{3\cdot(s+3)}{(s+2)\cdot(s+4)}$

Ομως απο το θεωρημα της συνελιξης γνωριζουμε οτι: $H(s) = \dfrac{\Psi(s)}{X(s)}$

$\Rightarrow$ Εξισωνοντας εχουμε

$$\frac{\Psi(s)}{X(s)} = \frac{3\cdot(s+3)}{(s+2)\cdot(s+4)}$$ $\Rightarrow$ πολλαπλασιαζουμε χιαστι, οποτε:

$$(s+2)\cdot(s+4)\cdot\Psi(s) = 3\cdot(s+3)\cdot X(s) \Rightarrow$$

$$(s^2+6s+8)\cdot\Psi(s) = (3s+9)\cdot X(s) \Rightarrow$$

Εφαρμοζουμε αντιστροφο μετασχηματισμο Laplace, οποτε:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ s^2\cdot\Psi(s) + 6s\cdot\Psi(s) + 8\cdot\Psi(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ 3s\cdot X(s) + 9\cdot X(s)\right\} \Rightarrow$$

λογω γραμμικοτητας

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s^2\cdot\Psi(s)\right\} + 6\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{s\cdot\Psi(s)\right\} + 8\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\Psi(s)\right\} = 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{s\cdot X(s)\right\} + 9\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} \Rightarrow$$

λογω της ιδιοτητας του Μ.L. παραγωγου

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + 6\cdot\frac{d\psi(t)}{dt} + 8\cdot\psi(t) = 3\cdot\frac{dx(t)}{dt} + 9\cdot x(t)$$

• Ολοκληρωνουμε τη διαφορικη εξισωση απο -∞ εως τ.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\tau}\left[\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2} + 6\cdot\frac{d\psi(\xi)}{d\xi} + 8\cdot\psi(\xi)\right]d\xi = \int_{-\infty}^{\tau}\left[3\cdot\frac{dx(\xi)}{d\xi} + 9\cdot x(\xi)\right]d\xi$$

$$\Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{\tau}} \frac{d^{\cancel{2}}\psi(\xi)}{d\xi^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{d\xi} + 6\cdot\cancel{\int_{-\infty}^{\tau}}\frac{\cancel{d}\psi(\xi)}{\cancel{d\xi}}\cdot\cancel{d\xi} + 8\cdot\int_{-\infty}^{\tau}\psi(\xi)\cdot d\xi$$

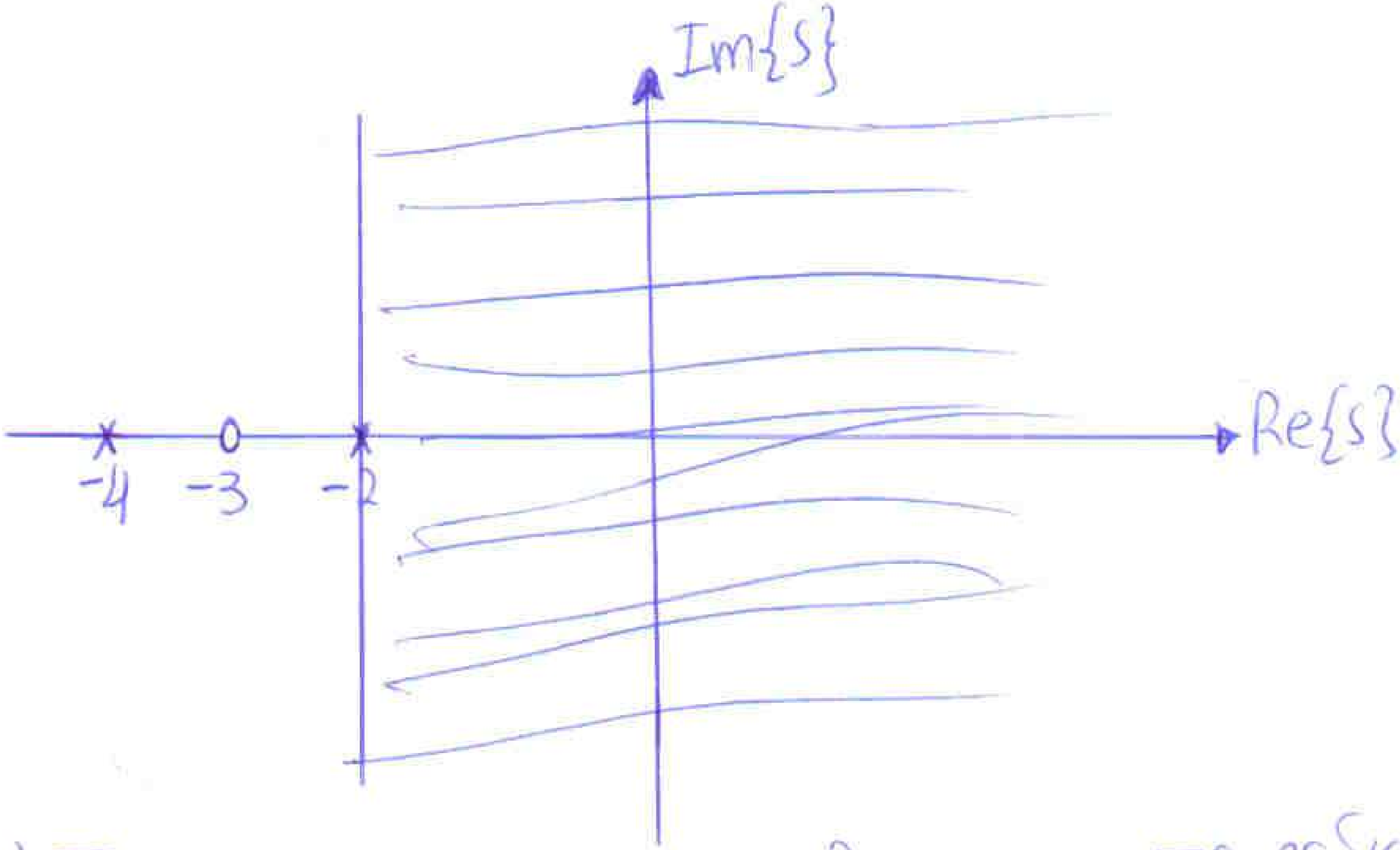
, ενω για $Re\{s\} > -2$ (που εστωσα είναι το π.Σ. της $H(s)$) τομη
με το $Re\{s\} > -1$ (που ειναι το π.Σ. της $X(s)$) δινει το $Re\{s\} > -1$
(που ειναι το π.Σ. της $\Psi(s)$).

β) <u>Πολοι</u> του συστηματος (τα σημεια οπου μηδενιζεται ο παρονομαστης):

$$(s+2)\cdot(s+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} s+2=0 \Rightarrow s=-2 \\ s+4=0 \Rightarrow s=-4 \end{cases}$$

<u>Μηδενικα</u> του συστηματος (τα σημεια οπου μηδενιζεται ο αριθμητης):

$$s+3=0 \Rightarrow s=-3$$



γ) Το συστημα ειναι ευσταθες γιατι στο πεδιο συγκλισης περιεχεται ο φανταστικος αξονας

δ) Για να γινει η διαγραμματικη υλοποιηση του συστηματος πρεπει να βρουμε τη διαφορικη εξισωση που συνδεει την εισοδο $x(t)$ με την εξοδο $\psi(t)$ του συστηματος.

$$= 3\cancel{\int_{-\infty}^{\tau}} \frac{\cancel{d}x(\xi)}{\cancel{d\xi}}\cancel{d\xi} + 9\int_{-\infty}^{\tau} x(\xi)\,d\xi$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + 6\psi(\tau) + 8\int_{-\infty}^{\tau}\psi(\xi)\,d\xi = 3x(\tau) + 9\int_{-\infty}^{\tau} x(\xi)\,d\xi$$

Ολοκληρωνουμε παλι την παραπανω εξισωση απο $-\infty$ εως t, αφου υπαρχουν ακομα παραγωγοι σε αυτη

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t}\left[\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + 6\psi(\tau) + 8\int_{-\infty}^{\tau}\psi(\xi)\,d\xi\right]d\tau = \int_{-\infty}^{t}\left[3x(\tau) + 9\int_{-\infty}^{\tau} x(\xi)\,d\xi\right]d\tau$$

$$\Rightarrow \cancel{\int_{-\infty}^{t}}\frac{\cancel{d}\psi(\tau)}{\cancel{d\tau}}\cancel{d\tau} + 6\int_{-\infty}^{t}\psi(\tau)\,d\tau + 8\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau}\psi(\xi)\,d\xi\,d\tau$$

$$= 3\int_{-\infty}^{t} 3x(\tau)\,d\tau + 9\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau} x(\xi)\,d\xi\,d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\psi(t) = {} & 3\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau + 9\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau} x(\xi)\,d\xi\,d\tau \\ & - 6\int_{-\infty}^{t}\psi(\tau)\,d\tau - 8\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau}\psi(\xi)\,d\xi\,d\tau\end{aligned}}$$

αφου: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = X_1(t)$

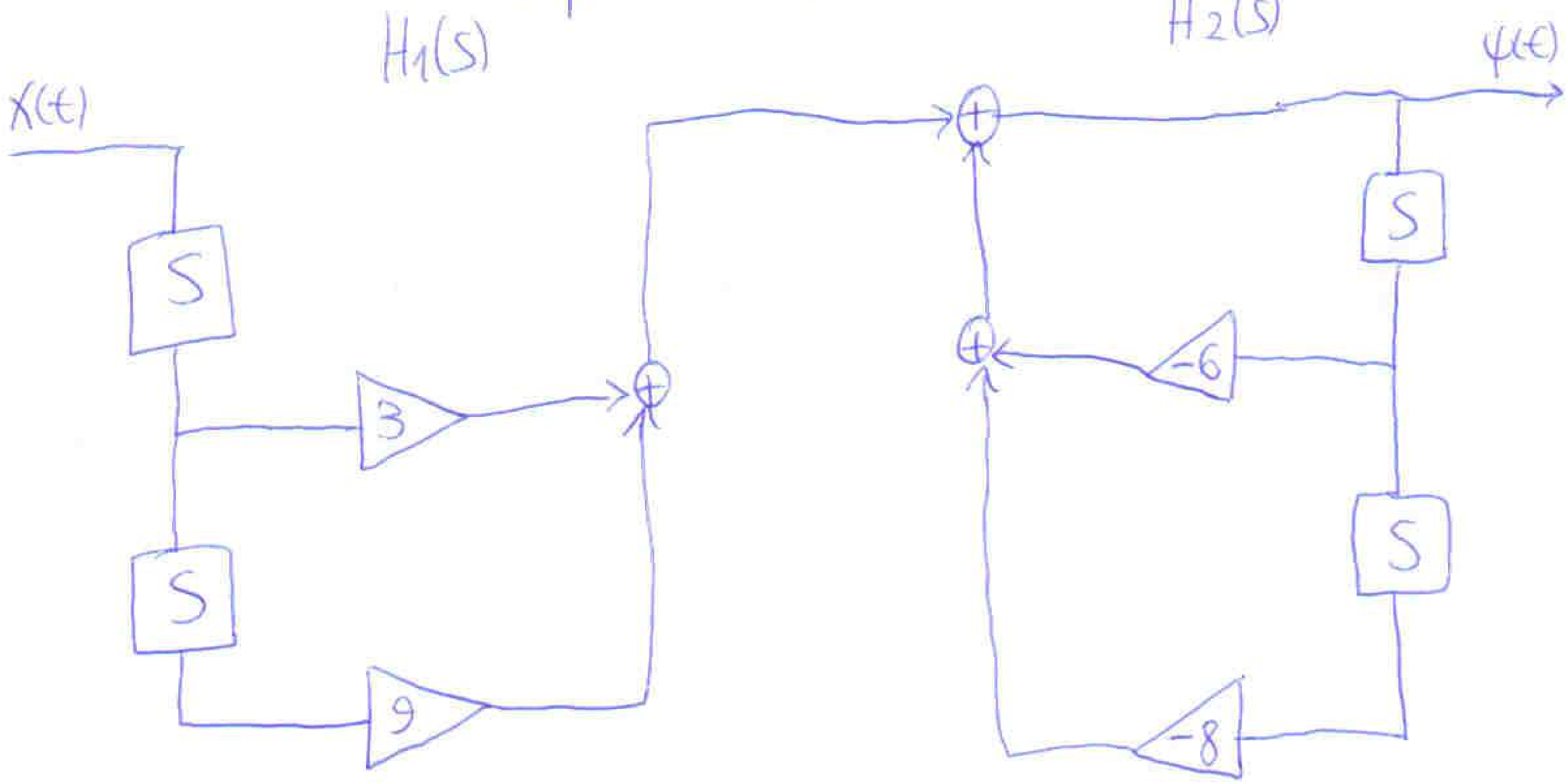
$$\int_{-\infty}^{t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\tau} x(\xi)\,d\xi}\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} X_1(\tau)\,d\tau = X_2(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\psi(\tau)\,d\tau = \psi_1(t)$$

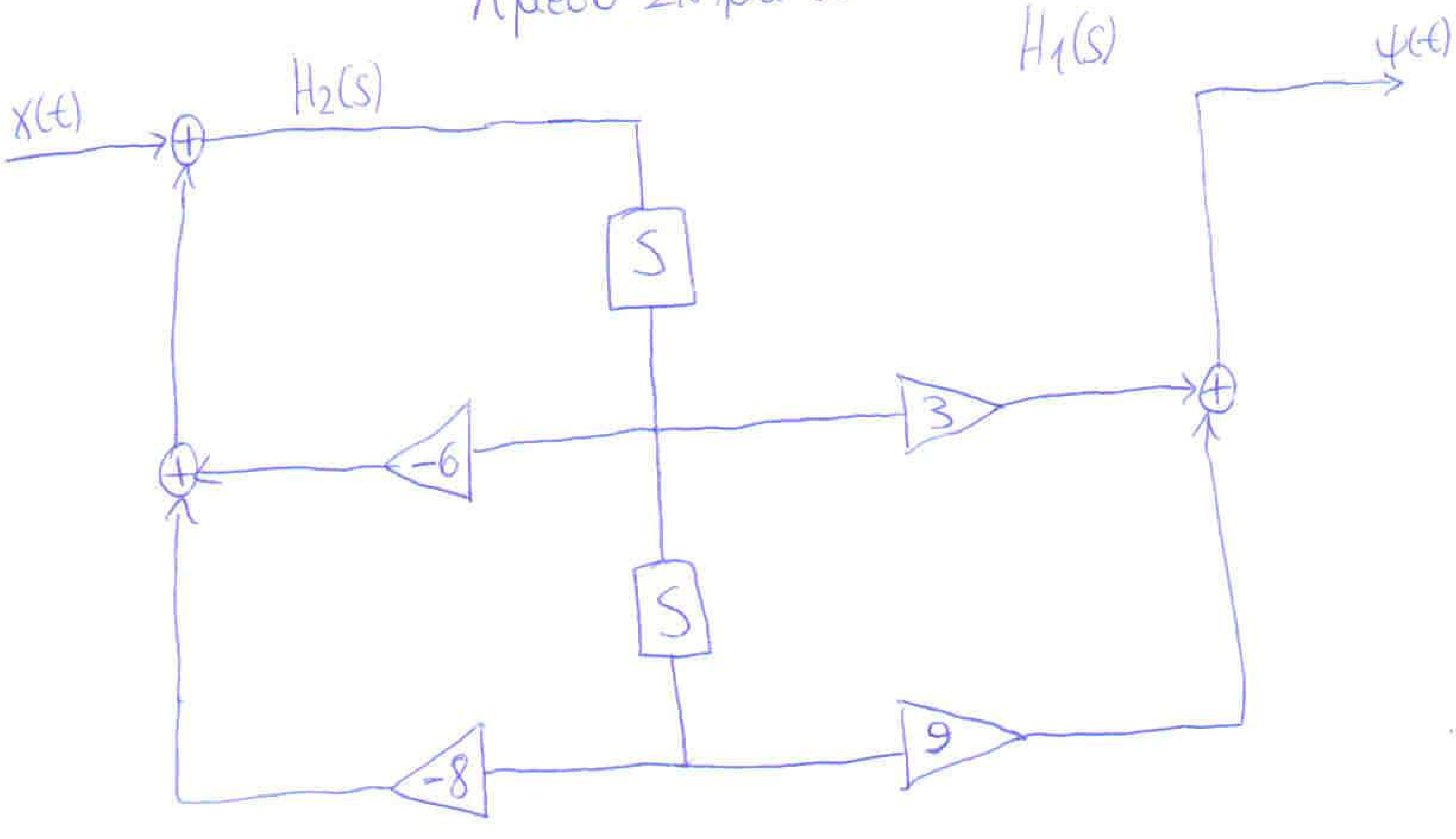
$$\int_{-\infty}^{t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\tau}\psi(\xi)\,d\xi}\,d\tau = \int_{-\infty}^{t}\psi_1(\tau)\,d\tau = \psi_2(t)$$

δηλαδη ολα τα ολοκληρωματα παρατηρουμε οτι εν τελει ειναι συναρτησεις του t, κατι που επρεπε να ισχυει.

Αμεσο Σχημα I



Αμεσο Σχημα II



Θεμα 6: Ιουνιος 2005

Ειναι: $x(t) = 10 \cdot \cos(2000 \cdot \pi\, t) = \underline{10} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot \underline{1000} \cdot t)$

Δηλαδη το $x(t)$ ειναι της μορφης: $x(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 t)$

, με $A = 10$ και $f_1 = 1000$ Hz

Οποτε η εξοδος του συστηματος δινεται απο τον τυπο:

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= |H(f_1)| \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t + \arg H(f_1)) \\
&= |H(1000)| \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot 1000 \cdot t + \arg H(1000)) \\
&= 0{,}5 \cdot 10 \cdot \cos\left(2000 \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 5 \cdot \cos\left(2000 \cdot \pi t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

, αφου $A = 10$, $f_1 = 1000 = 10^3$, $|H(f_1)| = |H(1000)| = 0{,}5$ απο το σχημα

Επισης απο το σχημα εχουμε:

Για $f = -2 \cdot 10^3$ Hz το $\arg H(-2 \cdot 10^3) = \pi$

Για $f = 10^3$ Hz το $\arg H(10^3) = ;$

Απλη μεθοδος των τριων: $\dfrac{-2 \cdot \cancel{10^3}}{\cancel{10^3}} = \dfrac{\pi}{\arg H(10^3)} \Leftrightarrow$

$$-2 \cdot \arg H(10^3) = \pi \Rightarrow \arg H(10^3) = -\frac{\pi}{2}$$

- Αρα λοιπον βρηκαμε οτι η εξισωση της εξοδου του συστηματος ειναι $\psi(t) = 5 \cdot \cos\left(2000 \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$

Οποτε βλεπουμε οτι το πλατος της ειναι 5 , αρα λογω αυτου απορριπτεται το $\psi_5(t)$