

**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
και ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΟΥΛΙΟΥ 2008**

Θα πρέπει να είστε προσεκτικοί όταν χρησιμοποιείτε το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + jy$ ($|z|^2 = z \cdot z^* = x^2 + y^2$).

Ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος πρέπει πάντα να συνοδεύεται από το πεδίο ορισμού του.

Η μετάβαση από τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός συστήματος στην απόκριση συχνότητάς του $H(\omega)$ γίνεται όταν στο πεδίο σύγκλισης της $H(s)$ περιέχεται ο φανταστικός άξονας.

ΘΕΜΑ 1. (1,4 μονάδες)

Δίνεται το σήμα

$$y(t) = \begin{cases} e^{j2t}, & |t| < \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

1α) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε την εξίσωση ανάλυσης να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $y(t)$.

1β) Να γίνει η γραφική παράσταση του πραγματικού μέρους του σήματος $y(t)$.

Υπόδειξη:

1α) Το σήμα $y(t)$ να γραφεί ως $y(t) = e^{i2t} \Pi\left(\frac{t}{2\pi}\right)$, και να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα της ολίσθησης συχνότητας του μετασχηματισμού Fourier.

1β) Να χρησιμοποιήσετε τη σχέση του Euler.

ΘΕΜΑ 2. (1,2 μονάδες)

Δίνεται το αιτιατό σύστημα του οποίου η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(s) = \frac{200}{s + 100}$$

Η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα

$$x(t) = 8 \sin^2(50t)$$

2α) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος $y(t)$ και

2β) Να βρεθούν οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier του σήματος $y(t)$.

Υπόδειξη:

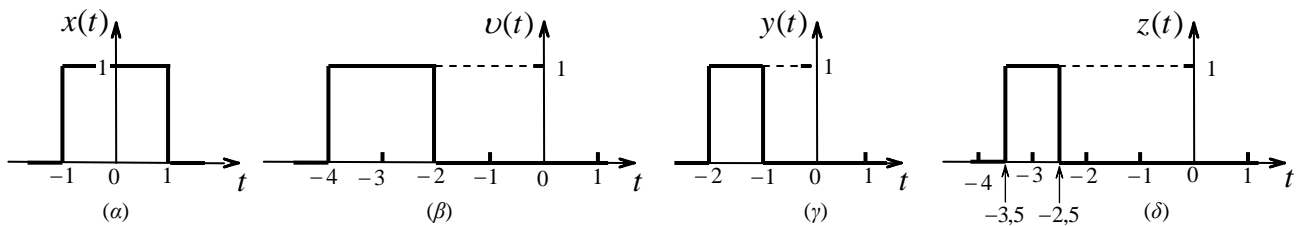
2α) Το σήμα $x(t)$ να γραφεί ως $x(t) = 4 - 4 \cos(100t)$, ως ένα σήμα, δηλαδή, που αποτελείται από μία συνεχή συνιστώσα και από ένα σήμα απλής συχνότητας.

Η έξοδος του συστήματος βρίσκεται με τη βοήθεια της σχέσης που προσδιορίζει την έξοδο ενός ΓΧΑΣ όταν το σήμα εισόδου είναι σήμα μίας συχνότητας.

2β) Να προσδιορίσετε τους συντελεστές χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler και συγκρίνοντας τη μορφή που αποκτά το σήμα εξόδου με την εξίσωση που περιγράφει το ανάπτυγμα σε εκθετική σειρά Fourier ενός σήματος (Εξίσωση σύνθεσης).

ΘΕΜΑ 3. (1,4 μονάδες)

Δίνεται το σήμα $x(t)$ του Σχήματος 1α.



Σχήμα 1 Τα σήματα $x(t)$, $v(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ στο Θέμα 3.

3α) Να εκφράσετε το σήμα $x(t)$ με τη βοήθεια της βηματικής συνάρτησης $u(t)$.

3β) Να εκφράσετε τα σήματα $v(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ του Σχήματος 1 με τη βοήθεια του σήματος $x(t)$.

Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Υπόδειξη:

3α) Το σήμα $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια διαφοράς δύο κατάλληλα ολισθημένων βηματικών συναρτήσεων.

3β) Έχουμε $y(t) = v(2t)$ και $z(t) = y(t + \frac{3}{2})$.

Είναι καλό να διαπιστώσετε ποιο σήμα προκύπτει αν υποβάλουμε το σήμα $v(t)$ καταρχήν σε συστολή και μετά σε χρονική ολίσθηση, και ποιο σήμα προκύπτει αν πρώτα γίνει η χρονική ολίσθηση και στη συνέχεια η συστολή του.

ΘΕΜΑ 4. (1 μονάδα)

Δίνεται ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h(t) = a \cdot \delta(t - \beta)$$

4α) Να δείξετε ότι το σύστημα αυτό προκαλεί μία εξασθένηση ίση με a και μία χρονική καθυστέρηση για όλο το φάσμα συχνοτήτων ($-\infty < \omega < \infty$).

4β) Τι παρατηρείτε για τη χρονική καθυστέρηση που προκαλεί το σύστημα;

Υπόδειξη:

Να προσδιορίσετε την απόκριση πλάτους και την απόκριση φάσης του συστήματος και να χρησιμοποιήσετε τη σχέση εισόδου εξόδου ενός ΓΧΑΣ όταν το σήμα εισόδου είναι σήμα μίας συχνότητας.

ΘΕΜΑ 5. (1,2 μονάδες)

5α) Να βρεθεί το σήμα $x(t)$ του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι

$$X(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

5β) Να βρεθεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t)$.

5γ) Να βρεθεί η ενέργεια του σήματος $x(t)$.

Υπόδειξη:

5α) Να βρεθεί το κατάλληλο ζεύγος μετασχηματισμού Fourier από το τυπολόγιο.

5β) Να χρησιμοποιήσετε τη σχέση $R_x(\tau) = F^{-1}[|X(\omega)|^2]$.

5γ) Υπολογίζεται ή με τη βοήθεια της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του σήματος ή με τη βοήθεια του θεωρήματος του Parseval.

ΘΕΜΑ 6. (1,4 μονάδες)

Δίνεται το αιτιατό και ευσταθές σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{5}{s+5}$$

Το σήμα εισόδου $x(t)$ είναι

$$x(t) = 0,6 \cdot e^{-2t} u(t)$$

Όταν η αρχική συνθήκη στην οποία βρίσκεται το σήμα εξόδου του συστήματος είναι $y(0^-) = -2$, να βρεθεί το σήμα εξόδου $y(t)$.

Υπόδειξη:

Προσδιορίστε τη διαφορική εξίσωση που συνδέει το σήμα εισόδου με το σήμα εξόδου και με τη βοήθεια του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace προσδιορίστε το σήμα εξόδου του συστήματος.

Εκμεταλλευθείτε την ιδιότητα της αιτιότητας και ευστάθειας του συστήματος για να προσδιορίσετε το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς.

ΘΕΜΑ 7. (1,2 μονάδες)

Δίνεται το γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα το οποίο περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt} y(t) + 3y(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{d}{dt} x(t) - 2x(t)$$

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστροφου συστήματος. Υπάρχει αντίστροφο σύστημα το οποίο είναι ευσταθές και αιτιατό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Υπόδειξη:

Η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστροφου συστήματος προσδιορίζεται με τη βοήθεια της πρότασης: Αν $H(s)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος, τότε η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστροφου συστήματος $H^{-1}(s)$ ικανοποιεί τη σχέση $H(s) \cdot H^{-1}(s) = 1$.

Με τρόπο ανάλογο με αυτό του Παραδείγματος 6.13 βρίσκουμε αν το σύστημα έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα.

ΘΕΜΑ 8. (1,2 μονάδες)

Δίνεται το αιτιατό και ευσταθές σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς,

$$H(s) = \frac{2}{s+2}$$

το οποίο βρίσκεται σε ηρεμία.

8α) Να βρεθεί η συχνότητα -3 dB.

8β) Για τη συχνότητα των $\omega = 6$ rad/sec να βρεθεί η απόκριση πλάτους σε decibel.

8γ) Να βρεθεί η έξοδος του συστήματος όταν το σήμα εισόδου είναι το $x(t) = 5\delta(t)$.

Υπόδειξη:

8α) Η προσδιορίζετε τη συχνότητα στην οποία τέμνονται οι δύο ασύμπτωτοι ευθείες που προσεγγίζουν το μέτρο στις χαμηλές και στις υψηλές συχνότητες στο διάγραμμα Bode του συστήματος ή με τη βοήθεια της ιδιότητας $|H(\omega_{-3dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\omega)|_{\max}$.

8β) Χρησιμοποιείστε τη σχέση: $20 \log_{10} |H(\omega)|$.

8γ) Χρησιμοποιείστε την πρόταση: Η κρουστική απόκριση $h(t)$ ενός συστήματος είναι η έξοδος του όταν αυτό διεγείρεται από τη κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$.