Διαφορική Γεωμετρία των Καμπύλων κ' Επιφανειών

Περίοδος Σεπτ. 2011

Θ.1) Μια καμπύλη λέγεται γενικευμένη έλικα αν όλες οι εφαπτόμενές της σχηματίζουν σταθερή γωνία με σταθερό διάνυσμα του χώρου.

α) Αποδείξατε πλήρως ότι αν $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ομαλή καμπύλη με $\tau(s) = k(s) > 0$ $s \in I$, τότε η γ είναι γενικευμένη έλικα.

β) Να εξετάσετε αν η καμπύλη $\gamma(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ είναι γενικευμένη έλικα.

Θ.2) α) Να εξηγήσετε γιατί υπάρχει ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\gamma: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με καμπυλότητα $k(s) = \frac{1}{s}$ και στρέψη $\tau(s) = \sqrt{2+s^2}$.
Στη συνέχεια να βρείτε το μήκος της καμπύλης $\beta: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\beta(s) = \gamma(s) + s\vec{n}(s)$ όπου $\vec{n}$ το πρωτοκάθετο διάνυσμα της γ.

β) Αν $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι ομαλή καμπύλη (όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας) με $k > 0$ στο I τέτοια ώστε $\forall t \in I$ τα διανύσματα $\gamma(t)$ και $\gamma''(t)$ είναι συγγραμμικά να αποδείξετε ότι η γ είναι επίπεδη

Θ3) Δίνεται παραμετρική επιφάνεια

$\vec{x}(u,v) = (2\,\text{συν}u\,\text{συν}v,\ 2\,\text{ημ}u\,\text{συν}v,\ 2\,\text{ημ}v)$

$u \in (-\pi, \pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του . όπου T το τρίγωνο στο επίπεδο (u,v) με κορυφές

$(0,0), (\frac{\pi}{4}, 0), (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

β) Να βρεθεί η καμπυλότητα Gauss της $\vec{x}$

γ) Να υπολογισθούν τα σύμβολα Christoffel Γ^1_{11} και Γ^1_{21} της $\vec{x}$.

Θ4) Δίνεται παραμετρική επιφάνεια $\vec{x}$ με συνιστώσες πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής E, F, G και e, f, g. Είναι γνωστό ότι $F = f = 0$ στο πεδίο ορισμού της $\vec{x}$.

α) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ είναι κύρια και να βρείτε τις αντίστοιχες κύριες καμπυλότητες k_1, k_2.

β) Αν επιπλέον $k_1, k_2 < 1$ στο πεδίο ορισμού της $\vec{x}$ να δείξετε ότι η $\vec{y}(u,v) = \vec{x}(u,v) + \vec{N}(u,v)$ είναι παραμετρική επιφάνεια και να βρείτε (συναρτήσει των E, G, e, g) τις συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής.