ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: 17/6/1999

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

να υπολογισθεί το rankA καθώς και μια βάση για τον $R(A)$ (χώρος στηλών του A) και τον $R(A^t)$ (χώρος γραμμών του A).

β) Δίνεται πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $n \geq 2$ και rank$A = 1$

I) Δείξτε ότι $0 \in \sigma(A)$

II) Αν $g(0)$ είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_0 = 0$ δείξτε ότι $g(0) = n-1$.

Θ.2) α) Δίνεται ο $n \times n$ πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, δείξτε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0$$

β) Δίνεται ο πίνακας $C = [M \,\vdots\, N]$, $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times m}$ όπου $p+m=n$.

Να δειχθεί ότι $|||C|||_2^2 \leq |||M|||_2^2 + |||N|||_2^2$

Θ 3) Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^3 \cdot (\lambda-3)^2$ και το ελάχιστο πολυώνυμο $f(\lambda) = (\lambda-2)^2 \cdot (\lambda-3)^2$.

I) Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J_A του A.

II) Να βρεθεί ο πίνακας $e^{J_A t}$.

III) Να αιτιολογηθεί η ύπαρξη του A^{-1} και να δειχθεί ότι:

$$A^{-1} = -\frac{1}{36}\left(A^3 - 10A^2 + 37A - 60I_n\right)$$

Θ.4) α) Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $A^2 = I_n$ να δειχθεί ότι $\text{rank}(A-I_n) + \text{rank}(A+I_n) = n$

(Υπόδειξη: χρησιμοποιείστε την σχέση: $(\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}A + \text{rank}B \leq \text{rank}(AB) + n$)

β) Είναι γνωστό ότι $\forall$ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\exists$ μοναδιαίος (unitary) πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $P^*AP = T$, όπου T άνω τριγωνικός πίνακας (θεωρ. Schur).

Δείξτε ότι: I) Τα διαγώνια στοιχεία $t_{ii} := \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ του πίνακα T είναι οι ιδιοτιμές του A.

II) $\|A\|_2^2 \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΤΡΙΑ (3) ΘΕΜΑΤΑ