

Μαθηματικά IVα. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 24-6-99

1. Οι βασικές εξισώσεις της μηχανικής ρευστών γράφονται, σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u + w \frac{\partial}{\partial z} u \right] = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v + w \frac{\partial}{\partial z} v \right] = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} w + v \frac{\partial}{\partial y} w + w \frac{\partial}{\partial z} w \right] = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w$$

όπου Δ η Λαπλασιανή, ρ, p, μ η πυκνότητα η πίεση και το ιξώδες, $\vec{g} = (g_x, g_y, g_z)$ η επιτάχυνση της βαρύτητας και u, v, w οι συνιστώσες της ταχύτητας προς κατά τη διεύθυνση των Ox, Oy και Oz αντίστοιχα. Οι άγνωστες συνάρτησεις, που προσδιορίζονται επιλύοντας τις εξισώσεις αυτές είναι οι $u = u(x, y, z, t), v = v(x, y, z, t), w = w(x, y, z, t)$. Να εξηραστεί αν οι παραπάνω εξισώσεις είναι ελλειπτικές, παραβολικές, υπερβολικές ή τριτοβάθμια (α) αν τα u, v, w εξαρτώνται από το χρόνο t και (β) αν δεν εξαρτώνται.

2. Να βρεθεί η λύση $u = u(x, y)$ της εξίσωσης του Laplace στο εσωτερικό του πεδίου $0 < x < \alpha, 0 < y < \beta$ για τις οποίες $u(x, 0) = f(x), u(x, y) = g(y), u(x, \beta) = C = u(0, y)$ όπου $f(x)$ και $g(y)$ δεδομένες συνάρτησεις και $C = C(\alpha, \beta)$

3. Να βρεθεί το ημικρατικό δυναμικό στο εσωτερικό της σφαίρας $r < R$ (όπου δεν υπάρχουν φορτία) αν στην επιφάνεια της σφαίρας είναι $u(R, \theta, \phi) = V_0 (\beta \cos^2 \theta - 1)$

4. Ένα εύκαμπτο νήμα τεντώνεται από μια σταθερή δύναμη \vec{B} . Σε ένα σημείο μήκους $(x', x'+\epsilon)$ του νήματος ασκείται μια δύναμη $\vec{F} = E \vec{f}$. Η δύναμη είναι προσηλωτή, σε κάθε σημείο x , μια κροχίμακση $Z = u(x)$ του νήματος από τη θέση $Z = 0$. (α) Να υπολογιστεί η "θεμελιώδης λύση" $E(x, x')$ (β) Να βρεθεί το σχήμα $Z = u(x)$ του νήματος για

μία οποιαδήποτε κατανομή $f(x)$ της δύναμης κατά μήκος του νήματος.

5. (α) Με υπολογιστεί η $\delta(x^2 - 9)$;

(β) Δείτε ότι $x \delta'(x) = -\delta(x)$