

Μαθηματικά IVα

18/9/97

Θέμα 2: Να βρεθεί η γενική λύση $u(x, y, z)$ της ΜΔΕ

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 3$$

Θέμα 1: Να βρεθεί το τύπου (υπερβολικού, παραβολικού ή ελλειπτικού) είναι η ΜΔΕ $y u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Θέμα 3: Ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις δεν αναπτύσσονται κατά Fourier στο διάστημα $(-L, L)$ (όπου L θετική σταθερά);

(α) $f(x) = |x|$ (β) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ (γ) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (δ) $f(x) = \begin{cases} 5 & x > 0 \\ -4 & x \leq 0 \end{cases}$

Για όσες δεν αναπτύσσονται κατά Fourier εξηγήστε γιατί δεν αναπτύσσονται. Για τις υπόλοιπες, σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και του αναπτύγματος Fourier στο διάστημα $(-2L, 2L)$.

Είναι δυνατή η παρεχόμενη άρο προς άρο των αναπτύγματος αυτών; Γιατί;

Θέμα 4: Να βρεθεί η λύση $u(x, y)$ της εξίσωσης του Laplace στο ορθογώνιο πεδίο $\Omega = \{0 < x < \alpha, 0 < y < \beta\}$, που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες:

$$u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq \alpha$$

$$u(x, \beta) = g(x) \quad 0 \leq x \leq \alpha \quad \text{όπου } f(x), g(x) \text{ δεδομένες συναρτήσεις}$$

$$u(0, y) = u(\alpha, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq \beta$$

Θέμα 5: Ένα σφαιρικό ηλεκτρικό φορτίο Q κρέμεται στην άκρη των αξόνων. Με τη βοήθεια της "συνάρτησης" δ του Dirac να εκφραστεί, σε σφαιρικές συντεταγμένες, η αντίστοιχη πυκνότητα φορτίου $\rho(r, \theta, \varphi)$.