

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV Β

25-6-98

151

- ΘΕΜΑ 1: (2.5 μόν) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις  $f_1(z) = x^2 + iy$  και  $f_2(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$  είναι αναλυτικές στο  $\mathbb{C}$ .
- (2.5 μόν) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα  $\oint_C f_1(z) dz$  και  $\oint_C f_2(z) dz$ , όπου  $C$  η καμπύλη που ορίζεται από το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $0, 1$  και  $i$  του μιγαδικού επιπέδου.

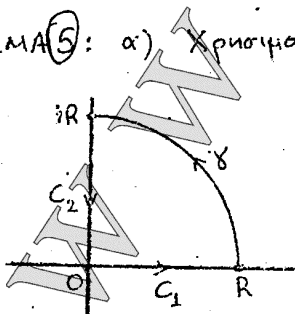
ΘΕΜΑ 2: (2.5 μόν) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $\oint_C \frac{1 - e^{2z}}{z^4} dz$ , όπου  $C$  ο κύκλος  $|z| = 1$ .

(2.5 μόν) Να βρεθούν τα ανώτερα σημεία και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα υπολοίπων της συνάρτησης  $f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin z}$ .

ΘΕΜΑ 3: (1.5 μόν) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $|f(z)|$  με  $f(z) = (z-1)^2$  στην περιοχή του μιγαδικού επιπέδου που ορίζεται από το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $0, -1, i$  και το εσωτερικό του.

ΘΕΜΑ 4: (1.5 μόν) Να βρεθεί η γενική έκφραση του αναπτύγματος Laurent της συνάρτησης  $f(z) = \frac{1}{z^2}$  γύρω από το σημείο  $z_0 = 1$  στις περιοχές  $|z-1| < 1$  και  $|z-1| > 1$ .

ΘΕΜΑ 5: α) Χρησιμοποιώντας την κλειστή καμπύλη του σχήματος να αποδείξετε ότι  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$  (2.5 μόν)



β) Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 0$$

(1.5 μόν)