

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IVB

4-7-1997.

(B) 01

ΘΕΜΑ 1: Να αποδειχθεί ότι

(1μ) α) 
$$\int_{1-\pi i}^{2+3\pi i} e^{-2z} dz = \frac{e^2-1}{2e^4}$$

(1μ) β) Το ανωτέρω ορθογώνιο είναι ανεξάρτητο του δρόμου που συνδέει τα σημεία  $1-\pi i$  και  $2+3\pi i$ .

ΘΕΜΑ 2: Να επαληθευτούν οι συνθήκες Cauchy-Riemann για την  
(2μ) συνάρτηση  $f(z) = \sinh z$

ΘΕΜΑ 3: Δίνεται η καμπύλη  $|z|=2$  του  $z$ -επιπέδου. Να βρεθεί ο  
(2μ) τόπος στο  $w$ -επίπεδο στον οποίο απεικονίζεται η καμπύλη αυτή με τον μετασχηματισμό  $w = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ .

ΘΕΜΑ 4: Να βρεθούν οι γενικές εκφράσεις των αναπτυγμάτων Laurent  
(2μ) της συνάρτησης  $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$  γύρω από το σημείο  $z_0=1$ .

ΘΕΜΑ 5: Να υπολογισθούν τα ορθογώνια

(1μ) α) 
$$\int_C e^{\frac{1}{z}} \sin \frac{1}{z} dz$$
, όπου  $C$  η καμπύλη  $|z|=1$ .

(1μ) β) 
$$\int_C \frac{e^z}{z^2(z^2-9)} dz$$
, όπου  $C$  η καμπύλη  $|z|=1$ .

ΘΕΜΑ 6: Δίνεται η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z-1}$  η οποία ορίζεται στην περιοχή  $|z+1| \leq 1$ .

(1μ) α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της  $|f(z)|$  στην περιοχή αυτή.

(1μ) β) Να αποδειχθεί η ανισότητα Cauchy για την δοθείσα συνάρτηση στην ανωτέρω περιοχή.