

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙVβ

4 - 9 - 1997

ΘΕΜΑ 1 (1.5 μονάδες) Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \left(\frac{2x^3}{3} - 3x + y^2\right) + i\left(\frac{y^2}{2} - x^2\right)$ έχει παράγωγο. Είναι η $f(z)$ αναλυτική στα σημεία αυτά ;

ΘΕΜΑ 2 (1.5 μονάδες) Δίνεται το πολυώνυμο $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ βαθμού $n \geq 1$ και έστω z_1 μια ρίζα αυτού. Είναι ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού z_1 ρίζα του πολυωνύμου $P_n(z)$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 3 (2 μονάδες) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta} d\theta$.

ΘΕΜΑ 4 (1.5 μονάδες) Να προσδιορίσετε τα σημεία και τις τομές διακλάδωσης της συνάρτησης $f(z) = \sqrt{z}$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \sqrt{z} dz$ κατά μήκος μιας καμπύλης που ενώνει τα σημεία 1 και -1 και βρίσκεται στο ημιεπίπεδο όπου $y < 0$.

ΘΕΜΑ 5 (2 μονάδες) Να βρεθεί η συνάρτηση $f(z)$ αν

$$\operatorname{Im} \frac{df(z)}{dz} = e^y \cos x, \quad f(0) = 1 \text{ και } f(\pi) = -1.$$

ΘΕΜΑ 6 (1.5 μονάδες) Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1(z) = \tan(\pi z)$ και

$f_2(z) = \frac{1}{z(e^z + 1)}$. Να προσδιορίσετε το είδος των ανωμάτων σημείων και να βρείτε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των συναρτήσεων στα σημεία αυτά.

ΘΕΜΑ 7 (1.5 μονάδες) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.