

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙVβ

23 - 9 - 1999

A

ΘΕΜΑ 1 Έστω $f(z)$ μια αναλυτική συνάρτηση. Αν $\operatorname{Im}\left\{\frac{d}{dz}f(z)\right\} = e^{-x}y \sin y + e^{-x}x \cos y$ και $f(0) = -i$, $f(-1) = 1$, να υπολογίσετε την συνάρτηση $f(z)$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδειχθεί ότι $\nabla^2 |f(z)|^5 = 25|f(z)|^3 |f'(z)|^2$.

β) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^3 + 1} dz = 0$ όπου Γ η καμπύλη $z = Re^{i\theta}$, με $0 \leq \theta \leq \pi$.

ΘΕΜΑ 3

α) Αν $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z^2 - 4z + 5)^2}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\oint_C (z+1) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ όπου C ο κύκλος $|z| = 4$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\oint_C (z-2)^4 \sin \frac{1}{z-2} dz$ όπου C ο κύκλος $|z-2| = 1$.

ΘΕΜΑ 4 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 9)(x - \pi)} dx$ δικαιολογώντας όλα τα βήματα του υπολογισμού.

ΘΕΜΑ 5

α) Να αναπτύξετε την συνάρτηση $f(z) = \frac{2}{z(z-2)}$ σε σειρά Laurent για $|z-1| < 1$ και $|z-1| > 1$.

β) Να βρεθούν και να ταξινομηθούν τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων $f(z) = \frac{1}{\tan^2 z}$ και $g(z) = \frac{z}{e^{1/z} - 1}$.