

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙVβ

23 - 9 - 1999

B

ΘΕΜΑ 1 Έστω $f(z)$ μια αναλυτική συνάρτηση. Αν $\operatorname{Re}\left\{\frac{d}{dz}f(z)\right\} = e^x x \cos y - e^x y \sin y$ και $f(0)=0$, $f(1)=0$, να υπολογίσετε την συνάρτηση $f(z)$.

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδειχθεί ότι $\nabla^2|f(z)|^3 = 9|f(z)||f'(z)|^2$.

β) Να αποδειχθεί ότι $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} \frac{1}{z^4 + 1} dz = 0$ όπου Γ η καμπύλη $z = Re^{i\theta}$, με $0 \leq \theta \leq \pi$.

ΘΕΜΑ 3

α) Αν $f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 + 2z + 2)^2}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\oint_C (z-1) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ όπου C ο κύκλος $|z| = 4$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\oint_C (z-2)^3 e^{(z-2)^2} dz$ όπου C ο κύκλος $|z-2| = 1$.

ΘΕΜΑ 4 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)(x + \pi)} dx$ δικαιολογώντας όλα τα βήματα του υπολογισμού.

ΘΕΜΑ 5

α) Να αναπτύξετε την συνάρτηση $f(z) = \frac{2}{z(z+2)}$ σε σειρά Laurent για $|z+1| < 1$ και $|z+1| > 1$.

β) Να βρεθούν και να ταξινομηθούν τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z^2)}$ και $g(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.