ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ I   12/2/2008

(Μονάδες 2)

Θέμα 1ο α) Γιά κάθε $r>0$ μέ $r \neq 5, 6$, ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{C(0,r)} \frac{1}{(z-5)(z-6)}\,dz .$$

β) Βρείτε ὅλες τίς ἀκέραιες συναρτήσεις, ἄν ὑπάρχουν, μέ τήν ἰδιότητα

$$f(1/n) = n\,\eta\mu\, 1/n + e^{1/n} \quad \text{γιά κάθε } n=1,2,\dots .$$

γ) Ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sigma\upsilon\nu\theta}\,d\theta$.

(Μονάδες 2,5)

Θέμα 2ο α) Ἔστω $f : \Delta(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ ὁλόμορφη συνάρτηση ὥστε $f^{(n)}(0) \in \mathbb{R}$ γιά κάθε $n=0,1,2,\dots$. Ἀποδείξτε ὅτι $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ γιά κάθε $z \in \Delta(0,1)$.

β) Γιά κάθε $k=1,2,\dots$ καί $r>0$, ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα

$$\int_{C(0,r)} z^k \,\sigma\upsilon\nu\, 1/z \, dz$$

γ) Ὑπολογίστε τό ὁλοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$.

(Μονάδες 3)

Θέμα 3ο α) Χρησιμοποιώντας τό ἀνάπτυγμα σέ δυναμοσειρά κέντρου 0 τῆς συνάρτησης $\log(1+z)$, $|z|<1$, ἀποδείξτε ὅτι $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)3^n}$.

β) Ἔστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ἀνοικτό σύνολο $a \in \Omega$ καί $f : \Omega \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ὁλόμορφη συνάρτηση ὥστε τό a εἶναι πόλος τῆς f τάξης $m \geq 1$. Ἀποδείξτε ὅτι

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)} .$$

γ) Ἔστω g ἀκέραια μή σταθερή συνάρτηση.

(i) Ἀποδείξτε ὅτι τό σύνολο $g[\mathbb{C}]$ εἶναι πυκνό στό $\mathbb{C}$.

(ii) Χρησιμοποιώντας τό (i), ἀποδείξτε ὅτι ἄν ἡ $|g|$ παίρνει ἐλάχιστη τιμή σέ κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$ τότε $g(z_0) = 0$.

Συμπεράνετε τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας.

(Μονάδες 3,5)

Θέμα 4ο α) Ἔστω $R>0$, $h : \Delta(0,0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ ὁλόμορφη συνάρτηση, $r_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μέ $0<r_0<R$, $0<\alpha<\beta$, ὥστε $\alpha \leq |zh(z)| \leq \beta$ γιά κάθε $z \in \Delta(0,0,r_0)$. Ἀποδείξτε ὅτι

$$\alpha \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(0,r)} h(z)\,dz \right| \leq \beta \quad \text{γιά κάθε } r \text{ μέ } 0<r<R.$$

β) Ἔστω $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ὁλόμορφη συνάρτηση ὥστε τό 0 εἶναι ἁπλός πόλος τῆς g καί $\operatorname{Res}(g,0) = 1$. Βρείτε τό $\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} g(z)\,dz$, ὅπου ημικύκλιο $\gamma_r : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} : \gamma_r(t) = re^{it}$ $(r>0)$.

γ) Ἔστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ἀνοικτό σύνολο, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, καί $z_0 \in \Omega$ ὥστε ὑπάρχει ἡ $f'(z_0)$. Ἀποδείξτε ὅτι γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\delta>0$ μέ $\Delta(z_0,\delta) \subseteq \Omega$ ὥστε, ἄν γ εἶναι κλειστή καμπύλη μέ $\gamma^* \subset \Delta(z_0,\delta)$, τότε

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \varepsilon M(z_0,\gamma) V(\gamma),$$

ὅπου $V(\gamma)$ εἶναι τό μῆκος τῆς γ καί $M(z_0,\gamma) = \sup\{|z-z_0| : z \in \gamma^*\}$.

Καλή ἐπιτυχία!