Ἐξετάσεις στὴν Μιγαδικὴ Ἀνάλυση 13/6/2008.

Θέμα 1ο (α) Θεωροῦμε τὴν συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μὲ τύπο $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Δεῖξτε ὅτι ἔχει κάθε τάξεως παράγωγο στὸ $\mathbb{R}$. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $\delta>0$ ὥστε: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ γιὰ κάθε $x\in(-\delta,\delta)$. Δεῖξτε ὅτι τὸ δ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι $\delta=2$ καὶ ἐξηγεῖστε γιατί. Ποιὰ ἡ μεγαλύτερη τιμὴ τοῦ δ;

(β) Βρεῖτε, ἂν ὑπάρχουν, ὅλες τὶς ἀκέραιες f ὥστε $\mathrm{Re}f(x+iy)=x^2-y^2$ γιὰ κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

(γ) Δῶστε παράδειγμα C^∞ ἁρμονικῆς συνάρτησης $u:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{R}$ τέτοιας ὥστε δὲν ὑπάρχει ὁλόμορφος $f:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}$ μὲ $u=\mathrm{Re}f$.

Θέμα 2ο (α) Ἔστω $\Omega\subset\mathbb{C}$ αὐθαίρετος τόπος καὶ $f:\Omega\to\mathbb{C}-\{0\}$ ὁλόμορφη. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει ὁλόμορφη $g:\Omega\to\mathbb{C}$ μὲ $f=e^g$ στὸ Ω ἂν καὶ μόνον ἂν ἡ $\frac{f'}{f}$ ἔχει παράγουσα στὸ Ω.

(β) Ἐξετάστε τὸ (α) ὅταν $\Omega=\mathbb{C}-\{0\}$ καὶ $f(z)=z$. Τί συμπεραίνετε;

(γ) Ἐξετάστε τὸ (α) ὅταν Ω κυρτὸς τόπος. Τί συμπεραίνετε;

Θέμα 3ο (α) Ἂν $\Omega\subset\mathbb{C}$ τόπος καὶ $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ὁλόμορφη δεῖξτε ὅτι ἡ f εἶναι σταθερά.

β) Ἂν $\Omega\subset\mathbb{C}$ τόπος καὶ $g:\Omega\to\mathbb{C}$ ὁλόμορφη μὲ $|g(z)|=1$ $\forall z\in\Omega$, δεῖξτε ὅτι g σταθερά.

γ) Βρεῖτε ὅλες τὶς ὁλόμορφες $F:\mathbb{C}-\{0\}\to\mathbb{C}$ ὥστε $|F(z)|\leq\frac{1}{|z|^{\frac{3}{2}}}$ γιὰ κάθε $z\neq0$.

δ) Βρεῖτε ὅλες τὶς ἀκέραιες συναρτήσεις w, ἂν ὑπάρχουν, ὥστε $w(\frac{1}{n})=n\sin\frac{1}{n}+e^{\frac{1}{n}}$, $\forall n=1,2,3$

Θέμα 4ο (α) Ἀναλύστε κατὰ Laurent τὴν $f(z)=\frac{1}{z}$ σὲ κάθε δακτύλιο κέντρου 1 ποὺ αὐτὸ εἶναι δυνατό.

(β) Γιὰ κάθε $r>0$, $r\neq2,3$ ὑπολογίστε τὸ $\int_{|z|=r}\frac{1}{(z-2)(z-3)}dz$

(γ) Ἐξετάστε ἂν ὑπάρχει $N\in\mathbb{Z}$ ὥστε ἡ συνάρτηση $z^N e^{\frac{1}{z}}$ νὰ ἐπεκτείνεται σὲ ἀκέραια συνάρτηση.

Θέμα 5ο (α) Ἔστω $f:\mathbb{C}-\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ ὁλόμορφη μὴ σταθερά. Δεῖξτε ὅτι ἔχει πυκνὴ εἰκόνα στὸ $\mathbb{C}$.

(β) Ὑπολογίστε μὲ τὴν μέθοδο ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων τὸ $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+\sin x}$.

(γ) Ὑπολογίστε μὲ τὴ μέθοδο ὁλοκληρωτικῶν ὑπολοίπων τὸ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

Καλὴ ἐπιτυχία.