ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Καθηγητής: Γεώργιος Καρακώστας

Ιωάννινα, 12-6-2000

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ
στο μάθημα
ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 1

βιβλίο

✓ 1) **[ΜΟΝ. 08]** Να αποδείξετε ότι κάθε σύνολο της μορφής $\Delta(a, \rho_1, \rho_2)$ είναι τόπος.

2) **[ΜΟΝ. 05]** Να εξετάσετε αν υπάρχει μη συγκλίνουσα ακολουθία μιγαδικών αριθμών (z_n) τέτοια ώστε $lim|z_n| = 1$ και $|z_n - 1| \geq \frac{3}{4}$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

✓ 3) **[ΜΟΝ. 07]** Να βρείτε την εικόνα της καμπύλης $\gamma : z := e^{it}$, $t \in [0, \pi]$ μέσω της συνάρτησης με τύπο

$$f(z) := z + \frac{1}{z}.$$

✓ 4) **[ΜΟΝ. 20]** Δίνεται η συνάρτηση με τύπο

$$p(z) := z^2 - 3z + 3 + i$$

και οι θετικά προσανατολισμένες περιφέρειες γ_1, γ_2 και γ_3 των κύκλων $B(0, 1)$, $B(0, 2)$ και $B(0, 3)$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

✓ a) $\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} p(z)dz$, ✓ b) $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{p(z)}$, ✓ c) $\int_{\gamma_1} \frac{p(z)dz}{z}$, ✓ d) $\int_{\gamma_3} \frac{p(z)dz}{z-2}$.

✓ 5) **[ΜΟΝ. 08]** Να αποδείξετε ότι αν z, w είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει η σχέση

✓

$$sin(z + w) = sinzcosw + coszsinw.$$

✓ 6) **[ΜΟΝ. 08]** Με τη βοήθεια του ορισμού να βρείτε την παράγωγο της συναρτησης με τυπο

$$f(z) := z^{\alpha},$$

όπου α είναι ένας οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.

7) Για κάθε $\delta > 0$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα γ_δ με αρχή το σημείο $-\delta$ και πέρας το $i\delta$ καθώς επίσης και το ευθύγραμμο τμήμα $\hat{\gamma}_\delta$ με αρχή το σημείο $i\delta$ και πέρας το 2δ.

✓ α) **[ΜΟΝ. 07]** Να γράψετε μία παραμετρική παράσταση του αθροίσματος $\gamma_\delta + \hat{\gamma}_\delta$.

β) **[ΜΟΝ. 07]** Αν f είναι μια ολόμορφη μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στον δίσκο $B(0, 2)$ να υπολογίσετε το όριο του ολοκληρώματος

$$\int_{\gamma_\delta+\hat{\gamma}_\delta} f(z)dz$$

2δ ρ 2δ

όταν το δ τείνει προς το μηδέν.

8) **[ΜΟΝ. 08]** Αν f είναι μια ακεραία μιγαδική συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε z να ικανοποιεί ~~τη σχέση~~

$$f(1+z) = f(z) = f(i+z),$$

σελ. 157.

να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(z) = 0$, για κάθε z.

9) **[ΜΟΝ. 05]** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μηδενική ακολουθία (z_n) τέτοια ώστε

$$\lim \sin\frac{1}{z_n} = i.$$

10) **[ΜΟΝ. ..]** ...αρακτηρίσετε το σημείο 0 ως προς τη συνάρτηση με τύπο

$$f(z) := \frac{\sin^4 z}{z}.$$

11) **[ΜΟΝ. 12]** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Cauchy για τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin 2x}{x(x^2+1)}dx.$$