ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Ιούνιος 1999

Θέμα 1°: Έστω $(X,Y)'$ μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y)=\theta^2 e^{-\theta y}, \quad 0<x<y<\infty .$$

Να υπολογισθούν (α) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{Y|X}(y\,|\,x)$, (β) η συνδιακύμανση $C(X,Y)$ και (γ) η καμπύλη (μέσης) παλινδρόμησης $y=m_{Y|X}(x)$.

Θέμα 2ο: Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-x/2}, \quad 0<x<\infty, \quad f_Y(y)=\frac{1}{2}e^{-y/2}, \quad 0<y<\infty.$$

(α) Να βρεθούν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{Z,W}(z,w)$ και οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_Z(z)$ και $f_W(w)$ των τυχαίων μεταβλητών $Z=(X+Y)/2$ και $W=(X-Y)/2$. (β) Να βρεθεί η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{W|Z}(w\,|\,z)$ και να υπολογισθεί $E(W\,|\,z)$. (γ) Να δειχθεί ότι Z και W είναι ασυσχέτιστες αλλά δεν είναι ανεξάρτητες.

Θέμα 3°: (α) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ανεξάρτητες και ισόνομες γεωμετρικές τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση πιθανότητας

$$f_X(x)=P(X=x)=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^x, \quad x=0,1,\ldots .$$

Υπολογίστε την πιθανογεννήτρια της X και συμπεράνετε την πιθανογεννήτρια και τη συνάρτηση πιθανότητας του αθροίσματος $S_r=X_1+X_2+\cdots+X_r$.

(β) Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια της τυποποιημένης κανονικής τυχαίας μεταβλητής Z και συμπεράνετε τη ροπογεννήτρια μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής X με $E(X)=\mu$ και $V(X)=\sigma^2$.

(γ) Έστω ότι η από κοινού κατανομή του ύψους X και του βάρους Y των φοιτητριών του Τμήματος Μαθηματικών είναι η διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_X=167\,\text{cm}$ $\sigma_X^2=25$, $\mu_Y=60\,\text{kg}$ $\sigma_Y^2=64$ και $\rho=5/8$. Να υπολογισθεί η δεσμευμένη πιθανότητα μια φοιτήτρια να έχει βάρος περισσότερο από 63kg δεδομένου ότι έχει ύψος 170cm.

Θέμα 4°: (α) Έστω X_k, $k=1,2,\ldots$ μια ακολουθία ασυσχετίστων τυχαίων μεταβλητών με $E(X_k)=\mu_k$ και $V(X_k)=\sigma_k^2\le c$. Αν $\overline{X}_\nu=\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}X_k$ και $\overline{\mu}_\nu=\frac{1}{\nu}\sum_{k=1}^{\nu}\mu_k$ να δειχθεί ότι η ακολουθία $\overline{X}_\nu-\overline{\mu}_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ συγκλίνει στοχαστικά στο μηδέν.

(β) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{48}$ ανεξάρτητες και ισόνομες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)=1/x^2$, $1\le x<\infty$. Να προσεγγισθεί η πιθανότητα το πολύ 12 από τις 48 τυχαίες μεταβλητές να έχουν τιμή μεγαλύτερη του 4.

Από τα 4 θέματα να γραφούν τα 3 σε 2 ½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ