

## ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ II

Γραπτή εξέταση της 2/7/98

Δίδονται πέντε δείγματα που είναι βαθμολογικά  
ισοδύναμα. Καλείστε να τα λύσετε όλα για  
να πάρετε άριστα, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις  
καθί σας. επιτυχία.

Ο δέσφ  
διδόσαν

I. Αλλάξας

Καθημέρις φυσικίς.

ΘΕΜΑ 1 : Να ευρεθούν οι σχέσεις αβεβαιότητας για τις συνιστώσες της τροχιακής στροφορμής  $L_x, L_y, L_z$  και να επαληθευθούν για το σύνολο των σφαιρικών αρμονικών  $Y_l^m$  με  $-l \leq m \leq l$ . Επίσης να δείξετε ότι οι καταστάσεις  $Y_l^l$  και  $Y_l^{-l}$  αποτελούν καταστάσεις ελάχιστης διακύβευσης ως προς τις σχέσεις στροφορμής.

(Γνωρίζετε ότι αν  $[A, B] = iC$  τότε

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle C \rangle|.$$

Επίσης για τις σφαιρικές αρμονικές ισχύει

$$L_{\pm} Y_l^m = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_l^{m \pm 1}$$

όπου  $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ .

ΘΕΜΑ 2 : Θεωρείστε ένα σύνστημα δύο σωματιδίων με spin  $S_1 = \frac{1}{2}$  που βρίσκεται σε κατάσταση συνολικού spin  $S = 0$ . Αν το ένα σωματίδιο βρίσκεται σε κατάσταση με  $S_y = \hbar/2$ , να ευρεθεί η πιθανότητα ώστε το άλλο σωματίδιο να βρίσκεται σε κατάσταση με  $S_x = \hbar/2$ .

ΘΕΜΑ 3: Δίδεται κεντρικό δυναμικό ως

μορής

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{g^2}{r^2}$$

(όπου  $g$  είναι μια αδιάστατη παράμετρος) που περιέχει το συνήδες δυνάμικο Coulomb πολυακεραίων ατόμων.

Να προσδιορίσετε επακριβώς τις ενεργειακές στάθμες των δέσμιων καταστάσεων, όπως επίσης και το βαθμό εκφυλισμού τους.

(Γνωρίζετε ότι για τα συνήδη πολυακεραϊκά άτομα η κβάντωση ως ενέργειας προκύπτει από τη συνήδη τετρατοποίηση των πολωνόμων Laguerre

$$2(N+l+1) = \frac{Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{E}} \quad \text{όπου } N \text{ και } l \text{ παίρνουν}$$

ανεξάρτητα τις τιμές  $0, 1, 2, \dots$ . Ο κύριος κβαντικός αριθμός ορίζεται ως  $n = N+l+1$ , οπότε  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ).

ΘΕΜΑ 4: Θεωρείστε το αέριο Fermi σε μια χωρική διάσταση με εξωτερικό δυναμικό ως μορής

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 < x < a \\ \infty, & \text{αν } x \geq a \text{ ή } x \leq 0. \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των σωματιδίων  $N$

Είναι πάρα πολύ μεγάλο, να προσδιορίσετε την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του αλληλαίου και να συγκρίνετε τη μέση τιμή της ενέργειας των σφαιρικών με την αντίστοιχη ενέργεια Fermi,  $E_F$ .  
 (Γνωρίζετε ότι  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ ).

ΘΕΜΑ 5: Θεωρείστε τις δύο δικασίες 2D κβαντομηχανικό πρόβλημα που ορίζεται από το Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + 4gxy)$$

όπου  $g$  είναι μια πολύ μικρή διάστατη οκταερα. Με τη βοήθεια των τελεστών δημιουργίας-καταστροφής να υπολογίσετε στα πλαίσια της θεωρίας διαταραχών σε πρώτη τάξη ως προς  $g$

- (i) την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του αλληλαίου
- (ii) την ενεργειακή μετατόπιση των δύο αρχικά εκφυλισμένων καταστάσεων  $|1, 0\rangle$  και  $|0, 1\rangle$ .

(Γνωρίζετε ότι οι τελεστές δημιουργίας-καταστροφής ενός αρμονικά ταλανωτή ορίζονται ως

$$A^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i \frac{P}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad A = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i \frac{P}{\sqrt{2m\hbar\omega}}. \text{ Επίσης}$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (A^+)^n |0\rangle \text{ για τις οποίες ισχύει } \langle m|n\rangle = \delta_{nm}$$