==
Μαθηματική Υποστήριξη Φοιτητών :
Ιδιαίτερα Μαθήματα, Λυμένες Ασκήσεις, Βοήθεια στη λύση Εργασιών
Δ. Θ. Χριστόπουλος, © www.maths.gr, Τηλ.: 69 79 210 251
Ασκήσεις συνήθων διαφορικών εξισώσεων
==

==
No 1 Άσκηση σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις : Bernoulli
Δ. Θ. Χριστόπουλος, © www.maths.gr, Τηλ.: 69 79 210 251
==

Έστω η Δ.Ε. τύπου Bernoulli :
$y' + y = y^3$

Είναι:
$f(x) = 1$
$g(x) = 1$
$n = 3$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής :
$u = y^{(1-n)} = \frac{1}{y^2}$
κι έχουμε την εξίσωση:

$u' + (1-n)\, f(x)\, u = (1-n)\, g(x)$

<=>

$u' - 2\,u = -2$
Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι :
$\mu = \mathbf{e}^{\left(\int -2\, dx\right)}$

=>

$\mu = \mathbf{e}^{(-2\,x)}$

Επομένως:

$$[\mathbf{e}^{(-2x)}\,u]' = -2\,\mathbf{e}^{(-2x)}$$

<=>

$$\mathbf{e}^{(-2x)}\,u = \int -2\,\mathbf{e}^{(-2x)}\,dx + C$$

<=>

$$\mathbf{e}^{(-2x)}\,u = \mathbf{e}^{(-2x)} + C$$

<=>

$$u = 1 + \mathbf{e}^{(2x)}\,C$$

Γενική Λύση (πεπλεγμένη μορφή) για την y:

$$\frac{1}{y^2} = 1 + \mathbf{e}^{(2x)}\,C$$

Γενική Λύση (ακριβής μορφή) για την y:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{e}^{(2x)}\,C}}$$

==

No 2 Άσκηση σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις : Bernoulli

Δ. Θ. Χριστόπουλος, © www.maths.gr, Τηλ.: 69 79 210 251

==

Έστω η Δ.Ε. τύπου Bernoulli :

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\mathbf{e}^x\,y^3}{x^2}$$

Είναι:

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\mathrm{g}(x) = -\frac{\mathbf{e}^x}{x^2}$$

$$n = 3$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής :

$$u = y^{(1-n)} = \frac{1}{y^2}$$

κι έχουμε την εξίσωση:

$$u' + (1-n)\,\mathrm{f}(x)\,u = (1-n)\,\mathrm{g}(x)$$

<=>

$$u' + \frac{2\,u}{x} = \frac{2\,\mathbf{e}^x}{x^2}$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι :

$$\mu = \mathbf{e}^{\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right)}$$

=>

$$\mu = x^2$$

Επομένως:

$$[x^2\,u]' = 2\,\mathbf{e}^x$$

<=>

$$x^2\,u = \int 2\,\mathbf{e}^x\,dx + C$$

<=>

$$x^2\,u = 2\,\mathbf{e}^x + C$$

<=>

$$u = \frac{2\,\mathbf{e}^{x} + C}{x^{2}}$$

Γενική Λύση (πεπλεγμένη μορφή) για την y:

$$\frac{1}{y^{2}} = \frac{2\,\mathbf{e}^{x} + C}{x^{2}}$$

Γενική Λύση (ακριβής μορφή) για την y:

$$y = \frac{x}{\sqrt{2\,\mathbf{e}^{x} + C}}$$

==

No 3 Άσκηση σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις : Bernoulli

Δ. Θ. Χριστόπουλος, © www.maths.gr, Τηλ.: 69 79 210 251

==

Έστω η Δ.Ε. τύπου Bernoulli :

$$y' - \frac{y}{4\,x} = \frac{x}{y^{3}}$$

Είναι:

$$\mathrm{f}(x) = -\frac{1}{4\,x}$$

$$\mathrm{g}(x) = x$$

$$n = \text{-}3$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής :

$$u = y^{(1-n)} = y^{4}$$

κι έχουμε την εξίσωση:

$$u' + (1-n)\,\mathrm{f}(x)\,u = (1-n)\,\mathrm{g}(x)$$

<=>

$$u' - \frac{u}{x} = 4\,x$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι :

$$\mu = \mathbf{e}^{\left(\int -\frac{1}{x}\, dx\right)}$$

=>

$$\mu = \frac{1}{x}$$

Επομένως:

$$\left[\frac{u}{x}\right]' = 4$$

<=>

$$\frac{u}{x} = \int 4\, dx + C$$

<=>

$$\frac{u}{x} = 4\,x + C$$

<=>

$$u = 4\,x^2 + x\,C$$

Γενική Λύση (πεπλεγμένη μορφή) για την y:

$$y^4 = 4\,x^2 + x\,C$$

Γενική Λύση (ακριβής μορφή) για την y:

$$y = (4\,x + C)^{(1/4)}\,x^{(1/4)}$$

==

No 4 Άσκηση σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις : Bernoulli

Δ. Θ. Χριστόπουλος, © www.maths.gr, Τηλ.: 69 79 210 251

==

Έστω η Δ.Ε. τύπου Bernoulli :

$$y' + x\,y = \frac{x}{y^3}$$

Είναι:

$\mathrm{f}(x) = x$

$\mathrm{g}(x) = x$

$n = -3$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής :

$u = y^{(1-n)} = y^4$

κι έχουμε την εξίσωση:

$$u' + (1-n)\,\mathrm{f}(x)\,u = (1-n)\,\mathrm{g}(x)$$

<=>

$$u' + 4\,x\,u = 4\,x$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι :

$$\mu = \mathbf{e}^{\left(\int 4\,x\,dx\right)}$$

=>

$$\mu = \mathbf{e}^{(2\,x^2)}$$

Επομένως:

$$\left[\mathbf{e}^{(2\,x^2)}\,u\right]' = 4\,\mathbf{e}^{(2\,x^2)}\,x$$

<=>

$$\mathbf{e}^{(2\,x^2)}\,u = \int 4\,\mathbf{e}^{(2\,x^2)}\,x\,dx + C$$

<=>

$$\mathbf{e}^{(2\,x^2)}\,u=\mathbf{e}^{(2\,x^2)}+C$$

<=>

$$u=1+\mathbf{e}^{(-2\,x^2)}\,C$$

Γενική Λύση (πεπλεγμένη μορφή) για την y:

$$y^4=1+\mathbf{e}^{(-2\,x^2)}\,C$$

Γενική Λύση (ακριβής μορφή) για την y:

$$y=(1+\mathbf{e}^{(-2\,x^2)}\,C)^{(1/4)}$$

===

No 5 Άσκηση σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις : Bernoulli

Δ. Θ. Χριστόπουλος, © www.maths.gr, Τηλ.: 69 79 210 251

===

Έστω η Δ.Ε. τύπου Bernoulli :

$$y'-\frac{y}{x}=-\frac{y^2}{x}$$

Είναι:

$$\mathrm{f}(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\mathrm{g}(x)=-\frac{1}{x}$$

$$n=2$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής :

$$u=y^{(1-n)}=\frac{1}{y}$$

κι έχουμε την εξίσωση:

$$u'+(1-n)\,\mathrm{f}(x)\,u=(1-n)\,\mathrm{g}(x)$$

<=>

$$u' + \frac{u}{x} = \frac{1}{x}$$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι :

$$\mu = \mathbf{e}^{\left(\int \frac{1}{x}\, dx\right)}$$

=>

$$\mu = x$$

Επομένως:

$$[\, x\, u\,]' = 1$$

<=>

$$x\, u = \int 1\, dx + C$$

<=>

$$x\, u = x + C$$

<=>

$$u = \frac{x + C}{x}$$

Γενική Λύση (πεπλεγμένη μορφή) για την y:

$$\frac{1}{y} = \frac{x + C}{x}$$

Γενική Λύση (ακριβής μορφή) για την y:

$$y = \frac{x}{x + C}$$