Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. (α) Μονωτική συμπαγής σφαίρα ακτίνας R έχει μεταβλητή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου που μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $\rho = Ar^2$, όπου A σταθερά με κατάλληλες μονάδες. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στη σφαίρα. ($r_1 < R$) και έξω από τη σφαίρα ($r_2 > R$). **(β)** Αν η σφαίρα ήταν αγώγιμη θα άλλαζε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από τη σφαίρα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας .

Β. Ένα πρωτόνιο, μάζας m και ηλεκτρικού φορτίου +e και ένα σωμάτιο α, μάζας 4m και ηλεκτρικού φορτίου +2e, μπαίνουν ταυτόχρονα με ίσες ταχύτητες u_o, από το ίδιο σημείο, σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, μαγνητικής επαγωγής B, κάθετα στις γραμμές του μαγνητικού πεδίου.

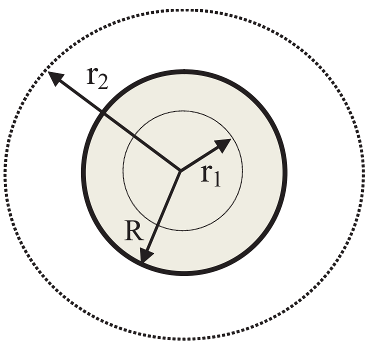
α Να περιγράψετε το είδος της κίνησης την οποία θα εκτελέσουν τα δύο φορτισμένα σωματίδια μέσα στο μαγνητικό πεδίο.

β. Πιο σωματίδιο και γιατί βγαίνει πρώτο από το μαγνητικό πεδίο;

γ. Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σωματιδίων τη χρονική στιγμή κατά την οποία βγαίνει από το μαγνητικό πεδίο το σωματίδιο α.

Λύση

Α. (α)



Περιοχή $r_1 < R$

Από το νόμο του Gauss έχουμε

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q'}{\varepsilon_0}$, όπου q' το φορτίο που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια. Το διάνυσμα της εντάσεως του μαγνητικού πεδίου $\vec{E}$ έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το διάνυσμα $d\vec{S}$. Άρα

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS \cos 0^o = E 4\pi r^2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_o}$$

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\int \rho dV \right) \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r A r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\int_0^r r^4 dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\frac{r^5}{5} \Rightarrow \quad E = \frac{Ar^3}{5\varepsilon_0}$$

<u>Περιοχή $r_2 > R$</u> Από το νόμο του Gauss έχουμε $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$, όπου q είναι το συνολικό φορτίο που περικλείει η γκαουσιανή επιφάνεια. Τότε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS \cos 0^o = E\ 4\pi r^2 \Rightarrow E\ 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o}$$

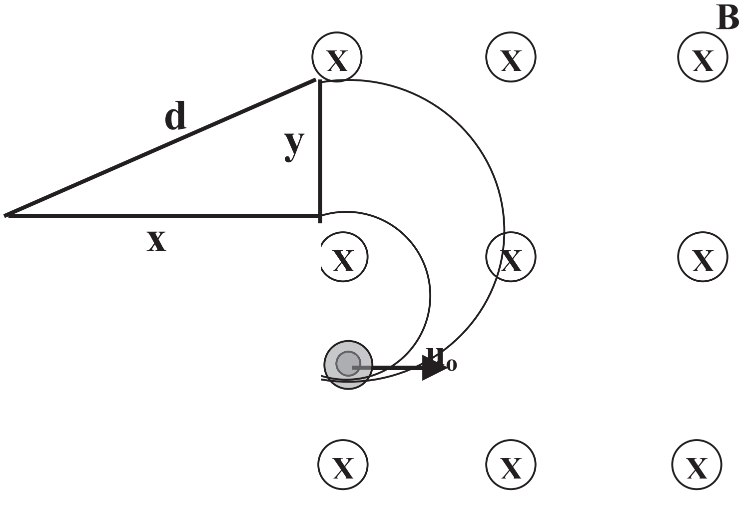
και

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\int \rho dV \right) \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R A r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi A}{\varepsilon_0}\frac{r^5}{5} \Rightarrow \quad E = \frac{AR^5}{5\varepsilon_0 r^2}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι στο εσωτερικό του αγωγού(r < R) δεν μπορεί να υπάρξει ηλεκτρικό φορτίο. Οπότε από το νόμο του Gauss βρίσκουμε ότι E = 0.

Για r > R με το Νόμο του Gauss, το πεδίο υπολογίζεται ίδιο με εκείνο της περίπτωσης A2 αφού μέσα στην Γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια περιέχεται όλο το ηλεκτρικό φορτίο της σφαίρας. Μόνη διαφορά είναι ότι τώρα (δηλ. στην περίπτωση του αγωγού) όλο το φορτίο είναι συγκεντρωμένο στην επιφάνεια της σφαίρας.

B.



(α) Το πρωτόνιο και το σωμάτιο α φέρουν ηλεκτρικά φορτία. Επομένως καθώς εισέρχονται στο μαγνητικό πεδίο, εξασκείται επάνω τους δύναμη Laplace η οποία δρα ως κεντρομόλος. Άρα θα εκτελέσουν κυκλική κίνηση.
Μπορούμε να προσδιορίσουμε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς καθώς και την περίοδο της κυκλικής κίνησης καθενός σωματιδίου.

Έχουμε: $qu_oB = \frac{mu_o^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mu_o}{qB}$

$$qu_oB = \frac{mu_o^2}{R} \Rightarrow u_o = \frac{qBR}{m} \Rightarrow \omega \cdot R = \frac{qBR}{m} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Τώρα για το πρωτόνιο έχουμε: $T_\pi = \frac{2\pi m}{eB}$ και $R_\pi = \frac{mu_o}{eB}$

Για το σωματίδιο α έχουμε αντίστοιχα: $T_\alpha = \frac{4\pi m}{eB}$ και $R_\alpha = \frac{2mu_o}{eB}$

(β) Επομένως μικρότερη περίοδο έχει το πρωτόνιο το οποίο θα εξέλθει πρώτο από το μαγνητικό πεδίο. Επίσης η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του πρωτονίου είναι η μισή από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σωματιδίου α.

(γ) Μέχρι να εξέλθει το σωμάτιο α από το μαγνητικό πεδίο, το πρωτόνιο κινείται εκτός μαγνητικού πεδίου για χρονικό διάστημα:

$t_\pi = \frac{T_\alpha}{2} - \frac{T_\pi}{2} = \frac{\pi m}{eB}$. Σε αυτό το χρονικό διάστημα το πρωτόνιο διατρέχει απόσταση x η οποία ισούται με: $x = u_o \cdot t_\pi \Rightarrow x = u_o \cdot \frac{\pi m}{eB}$

Επίσης έχουμε: $y = 2R_\alpha - 2R_\pi = \frac{2mu_o}{eB}$

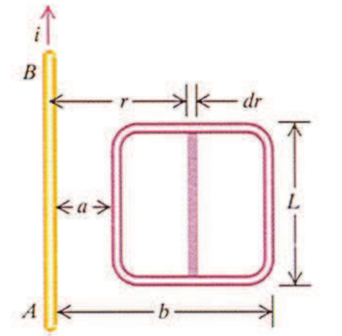
Επομένως η απόσταση d μεταξύ τους την στιγμή που εγκαταλείπει το μαγνητικό πεδίο το σωματίδιο α είναι:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{\pi^2 m^2 u_o^2}{e^2B^2} + \frac{4m^2u_o^2}{e^2B^2}} = \frac{mu_o}{eB} \cdot \sqrt{\pi^2 + 4}$$

ΘΕΜΑ 2

Το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα AB που εκτείνεται στο άπειρο (σχήμα) έχει φορά προς τα πάνω και αυξάνει με σταθερό ρυθμό dI/dt. a) Να βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του πεδίου B σε απόσταση r από το σύρμα όταν το ρεύμα που το διαρρέει είναι I. b) Πόση ροή $d\Phi_B$ διαπερνά τη στενή σκιασμένη λωρίδα; c) Πόση είναι η ολική ροή που διαπερνά τον βρόχο; d) Βρείτε την επαγόμενη ΗΕΔ στον βρόχο. e) Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ αν α = 0,100 m, b = 0,300 m, L = 0,200 m και di/dt = 1,20 A/s. Δίνεται η μαγνητική διαπερατότητα του κενού μ_0= 4π 10^{-7} kg m/A^2 s^2

Λύση



a) Για να βρούμε το B χρησιμοποιούμε το νόμο του Ampere:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Άρα, στη δεξιά πλευρά του σύρματος, σε απόσταση r από αυτό, το μαγνητικό πεδίο B είναι $B = (\mu_0/2\pi r) I$

με φορά προς τη σελίδα του βιβλίου

b) Η σκιασμένη λωρίδα έχει επιφάνεια $dS = Ldr$
άρα

$$d\Phi_B = \vec{B}(r)\cdot d\vec{S} = B(r)Ldr = \frac{\mu_o I}{2\pi} L \frac{dr}{r}$$

Από τη σκιασμένη λωρίδα περνάει ροή

$$d\Phi_B = \frac{\mu_o I}{2\pi} L \frac{dr}{r}$$

c) Για να βρούμε την ολική ροή που διαπερνά το βρόχο ολοκληρώνουμε τη $d\Phi_B$ από r=a ως r=b:

$$\Phi_B = \oint B(r)Ldr = \frac{\mu_o I}{2\pi} L \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o IL}{2\pi} \ln(\frac{b}{a})$$

Άρα η ολική ροή που διαπερνά το βρόχο είναι

$$\Phi_B = \frac{\mu_o IL}{2\pi} \ln(\frac{b}{a})$$

d) Επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο:

$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_o L}{2\pi} \ln(\frac{b}{a}) \frac{dI}{dt}$$

ε) Για α = 0.100m, b = 0.300m, L =0.200m και dI/dt =1.20A/s βρίσκουμε
E =………= $-5.27 \ 10^{-8}$ V
Το αρνητικό πρόσημο εκφράζει τον κανόνα του Lentz για τη φορά της E και του επαγόμενου ρεύματος αριστερόστροφα, ώστε να αναιρεθεί η αύξηση της μαγνητικής ροής μέσα από αυτό λόγω της αύξησης του I στο σύρμα AB.

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = -\hat{i}+2\hat{j}$ και $\vec{b} = 2\hat{i}+2\hat{j}$.

a. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{c}$ που να είναι κάθετο στο $\vec{b}$ τέτοιο ώστε $\vec{c}\cdot\hat{j} > 0$ και $|\vec{c}| = 2\sqrt{2}$.
b. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας του $\vec{a}$ με το $\vec{c}$.
c. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{b}$ και $\vec{c}$.
d. Να βρεθούν οι πραγματικοί λ και μ τέτοιοι ώστε $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Λύση

(α΄) Έστω $\vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}$. Τότε

$$\vec{c} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{c}\cdot\vec{b} \Rightarrow 2c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

Άρα $\vec{c} = -k\hat{i}+k\hat{j}$.

$$\vec{c}\cdot\hat{j} > 0 \Rightarrow k > 0$$

$$|\vec{c}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2k^2 = 8 \Rightarrow |k| = 2$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις $k = 2$ οπότε

$$\vec{c} = -2\hat{i}+2\hat{j}$$

(β΄)

$$\cos(\vec{a},\vec{c}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \frac{(-\hat{i}+2\hat{j})\cdot(-2\hat{i}+2\hat{j})}{|-\hat{i}+2\hat{j}||-2\hat{i}+2\hat{j}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(γ΄)

$$E = \frac{1}{2}|\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(4+4)\hat{k}| = 4$$

(δ') Η σχέση $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ δίνει

$$\lambda(-\hat{i}+2\hat{j}) + \mu(2\hat{i}+2\hat{j}) = -2\hat{i}+2\hat{j}$$

από όπου παίρνουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\left.\begin{array}{rcr} -\lambda+2\mu & = & -2 \\ 2\lambda+2\mu & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} \lambda & = & \frac{4}{3} \\ \mu & = & -\frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

Άρα $\vec{c} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

ΘΕΜΑ 2

Α. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα

(α) $\int x^2 \sin 2x \, dx$ (β) $\int \frac{1-x}{(x-2)(2x^2-x-6)} dx$

Β. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια χρησιμοποιώντας τον κανόνα του l' Hôpital:

(α) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan 2x)}{\ln(\tan 3x)}$ (β) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{3x} - 5x)}{x}$

Λύση

Α.

(α) $\int x^2 \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int 2x\frac{1}{2}\cos 2x \, dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x \, dx =$

$-\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

(β) $\int \frac{1-x}{(x-2)(2x^2-x-6)} dx = \int \frac{1-x}{(x-2)^2(2x+3)} dx$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{2x+3} = \frac{1-x}{(x-2)^2(2x+3)}$$

$$A(x-2)(2x+3) + B(2x+3) + C(x-2)^2 = 1-x$$

$$A(2x^2-x-6) + B(2x+3) + C(x^2-4x+4) = 1-x$$

x^2: $2A + C = 0 \Rightarrow C = -2A$

x: $-A + 2B - 4C = -1$

$-6A + 3B + 4C = 1$

$$\begin{Bmatrix} C=-2A \\ -A+2B+8A=-1 \\ -6A+3B-8A=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} C=-2A \\ 2B+7A=-1 \\ -7A+5B+0=0 \Rightarrow B=\frac{7}{5}A \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} C=-2A \\ \frac{14}{5}A+7A=-1 \\ B=\frac{7}{5}A \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A=-\frac{5}{49} \\ B=\frac{7}{5}A \\ C=-2A \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A=-\frac{5}{49} \\ B=-\frac{1}{7} \\ C=\frac{10}{49} \end{Bmatrix}$$

Άρα

$$\int \frac{1-x}{(x-2)(2x^2-x-6)}dx = -\frac{5}{49}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{7}\int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{10}{49}\int \frac{dx}{2x+3} =$$

$$-\frac{5}{49}\ln|x-2| + \frac{1}{7}\frac{1}{x-2} + \frac{5}{49}\ln|2x+3|$$

Β.

(α) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan 2x)}{\ln(\tan 3x)}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\tan 2x}\frac{1}{\cos^2 2x}2}{\frac{1}{\tan 3x}\frac{1}{\cos^2 3x}3} \quad \text{(εφαρμόσαμε τον κανόνα του l' Hôpital)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin 2x}\frac{1}{\cos 2x}2}{\frac{1}{\sin 3x}\frac{1}{\cos 3x}3} \quad \text{(χρησιμοποιήσαμε } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\text{)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\frac{\sin 3x\cos 3x}{\sin 2x\cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\frac{\frac{1}{2}\sin 6x}{\frac{1}{2}\sin 4x} \quad \text{(χρησιμοποιήσαμε } \sin\alpha\cos\alpha = \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\text{)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\frac{\sin 6x}{\sin 4x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\,\frac{6\cos 6x}{4\cos 4x} \quad \text{(εφαρμόσαμε ξανά τον κανόνα του l' Hôpital)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{6}{4} \;=\; 1\,.$$

(β) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{3x}-5x)}{x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(e^{3x}-5x)}\cdot(3e^{3x}-5)}{1} \qquad \text{(με τον κανόνα του l' Hôpital)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(3e^{3x}-5)}{(e^{3x}-5x)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5} \qquad \text{(πάλι ο κανόνας του l' Hôpital)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{27e^{3x}}{9e^{3x}} \qquad \text{(ο κανόνας του l' Hôpital για τρίτη φορά)}$$

$$= \frac{27}{9} \;=\; 3\,.$$

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) \;=\; \frac{x}{x^2-4x+4}$$

(α) Να μελετήσετε την $f(x)$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$ και να σκιαγραφήσετε το αντίστοιχο εμβαδόν στη γραφική παράσταση της $f(x)$.

<u>Λύση</u>

(α) Καταρχάς παρατηρούμε ότι η συνάρτηση γράφεται πιο κομψά ως εξής:

$$f(x) \;=\; \frac{x}{(x-2)^2}$$

Πεδίο ορισμού : Η συνάρτηση ορίζεται για κάθε $x \in \Re$ εκτός $x = 2$. Σ'αυτό το σημείο η $f(x)$ έχει μια κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty .$$

Ρίζες : Η μοναδική ρίζα $f(x) = 0$ είναι $x = 0$.
Εκτός από αυτό παρατηρούμε ότι η $f(x)$ μηδενίσεται για $x \to \pm\infty$, δηλαδή η x-άξονας είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Ακρότατα: Η παράγωγος

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{(x+2)}{(x-2)^3}$$

μηδενίζεται για $x = -2$. Στο σημείο $x = +2$ βρίσκεται (όπως είδαμε πιο πάνω) η κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f(x)$. Στο σημείο $x = -2$ βρίσκεται το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης:

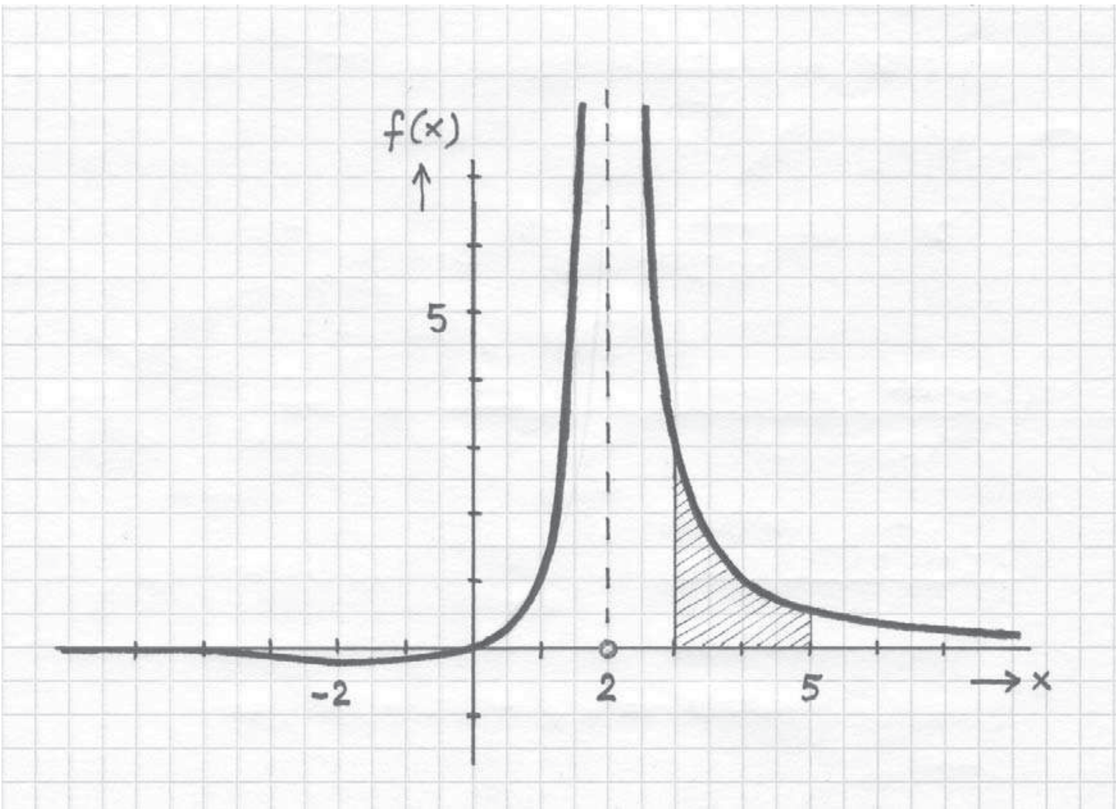
$$f(-2) = \frac{-2}{(-4)^2} = -\frac{1}{8}.$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι πρόκειται πραγματικά για ελάχιστο υπολογίζουμε και την δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = \frac{2(x+4)}{(x-2)^4} \underset{x=-2}{=} \frac{1}{64} > 0 .$$

Στο $x =$ - 4 (όπου $f''(x)$ μηδενίζεται) βρίσκεται ένα **σημείο καμπής**.

Γραφική παράσταση



Το σκιαγραφημένο εμβαδόν ανάμεσα στα $x = 3$ και $x = 5$ αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $\int_3^5 f(x)\,dx$, το οποίο υπολογίζουμε στο μέρος (β).

(β) Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλύουμε την συνάρτηση σε απλά κλάσματα

$$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}}{(\mathrm{x}-2)^2} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}-2} + \frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{x}-2)^2} = \frac{\mathrm{A(x}-2)+\mathrm{B}}{(\mathrm{x}-2)^2}$$

όπου δηλαδή οι συντελεστές A και B καθορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{cases} Ax = x \;\Rightarrow\; A = 1, \\ -2A+B = 0 \;\Rightarrow\; B = 2A = 2. \end{cases}$$

Άρα:

$$\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 \frac{dx}{x-2} + 2\int_3^5 \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= \Big[\ln|x-2|\,\Big]_3^5 + 2\left[\frac{-1}{(x-2)}\right]_3^5$$

$$= \ln 3 + \frac{4}{3} \qquad (= 2.43...) \quad \text{τετραγωνικές μονάδες.}$$

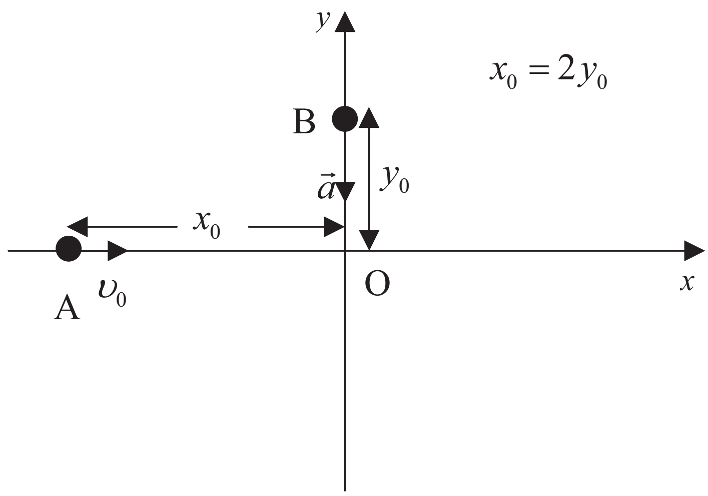
Το αντίστοιχο εμβαδόν έχει σκιαγραφηθεί στη γραφική παράσταση της $f(x)$.

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. Δύο σώματα ίσης μάζας m κινούνται σε οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εάν για $t = 0$ το σώμα Α κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0 και το σώμα Β αρχίζει να κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$,

α) ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της επιτάχυνσης ώστε να συγκρουστούν τα δύο σώματα στην αρχή των αξόνων;

β) Ποια θα είναι η ταχύτητα του σώματος Β κατά τη στιγμή της σύγκρουσης; Υποθέστε ότι η αρχική απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο είναι διπλάσια της αρχικής απόστασης του σημείου Β.

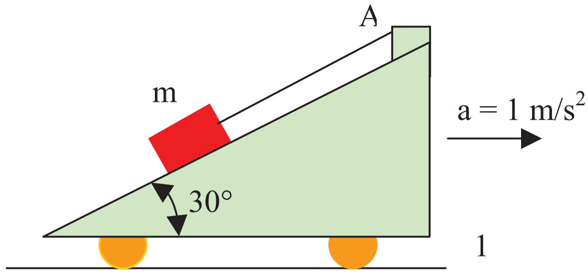
γ) Εάν τα δύο σώματα συγκρουσθούν πλαστικά ποιά θα είναι η διεύθυνση κίνησης και η ταχύτητα του συσσωματώματος `;

Β. Το πρίσμα του σχήματος κινείται πάνω σε οριζόντια επιφάνεια χωρίς τριβές. Πάνω στο πρίσμα βρίσκεται σώμα μάζας m=4 kg το οποίο είναι δεμένο μέσω αβαρούς νήματος στο σημείο Α. Η επιφάνεια μεταξύ σώματος και πρίσματος θεωρείται λεία. Υπολογίστε την τάση του νήματος και την κάθετη δύναμη που ασκεί το πρίσμα στο σώμα όταν:

(α) το πρίσμα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

(β) το πρίσμα κινείται με επιτάχυνση 1 m/s^2.

(Δίδεται: g = 10 m/sec^2)



<u>Λύση</u>

Α.

α) Έστω ότι η κρούση των δύο σωμάτων γίνει τη χρονική στιγμή $t = t_0$. Επομένως για $t = t_0$ και τα δύο σώματα θα πρέπει να βρίσκονται στη θέση Ο. Επομένως έχουμε:

Για το σώμα Α: $\left(OA\right) = x_0 = \upsilon_0 t_0 \Rightarrow t_0 = \dfrac{x_0}{\upsilon_0}$

Για το σώμα Β: $\left(OB\right) = y_0 = \dfrac{1}{2}\alpha t_0^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}x_0 = \dfrac{1}{2}\alpha\left(\dfrac{x_0}{\upsilon_0}\right)^2 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\upsilon_0^2}{x_0}$

β) Η ταχύτητα του σώματος Β κατά τη στιγμή της σύγκρουσης θα είναι

$$\upsilon_B = \alpha t = \frac{\upsilon_0^2}{x_0}\frac{x_0}{\upsilon_0} = \upsilon_0$$

Άρα τα δύο σώματα κατά τη στιγμή της σύγκρουσης θα έχουν το ίδιο μέτρο ταχύτητας υ_0

γ) Για να βρούμε τη διεύθυνση και την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση χρησιμοποιούμε την αρχή διατήρησης της ορμής.

Η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων αμέσως πριν τη σύγκρουση είναι

Κατά τον άξονα x: $p_x = m_A\upsilon_A = m\upsilon_0$

Κατά τον άξονα y: $p_y = m_B\upsilon_B = -m\upsilon_0$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μάζας 2m θα έχει ορμή ίση με :

$$p'_x = p_x \Rightarrow 2m\upsilon'_x = m\upsilon_0$$

$$p'_y = p_y \Rightarrow 2m\upsilon'_y = -m\upsilon_0$$

Άρα $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_0}{2}$ $\upsilon'_y = -\dfrac{\upsilon_0}{2}$ και η τελική ταχύτητα θα έχει μέτρο $\upsilon' = \dfrac{\upsilon_o}{\sqrt{2}}$ και διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x

Β. Το σώμα μάζας 4 kg ακολουθεί την κίνηση της σφήνας και θα έχει την ίδια επιτάχυνση με αυτήν. Πάνω στο σώμα ασκούνται η τάση του νήματος Τ, το βάρος του Β=mg και η κάθετη δύναμη από την σφήνα Ν. Αναλύουμε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα στις x και y συνιστώσες. Η επιτάχυνση a είναι στην οριζόντια κατεύθυνση, (κατά το σχήμα στην κατεύθυνση x).

$$\sum F_x = ma \Rightarrow T\cos 30^\circ - N\sin 30^\circ = ma \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin 30^\circ + N\cos 30^\circ - B = 0 \qquad (2)$$

Από την εξίσωση (2) έχουμε

$$N = \frac{mg - T\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην εξίσωση (1) έχουμε

$$T\cos 30^\circ - \left(\frac{mg - T\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right)\sin 30^\circ = ma \Rightarrow$$

$$T\left(\cos 30^\circ + \frac{\sin^2 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right) = ma + mg\tan 30^\circ \Rightarrow$$

$$T\left(1.155\right) = ma + mg\tan 30^\circ \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) τις τιμές α = 1 m/s^2, m = 4 kg, και g = 10m/s^2 βρίσκουμε

T=23,46 N και

Τέλος από την (3)

N=32,64 N

Στην περίπτωση που το σύστημα δεν επιταχύνεται, οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T\cos 30^\circ - N\sin 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin 30^\circ + N\cos 30^\circ - B = 0$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων ως προς T και N παίρνουμε

T = 20 N   και   N = 34,64 N

ΘΕΜΑ 2

Α. Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου δίνεται από τη σχέση: $V(r) = D\left(-\frac{b}{r} + \frac{b^2}{r^2}\right)$, όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των ατόμων και D, b, είναι θετικές σταθερές. Το ένα άτομο είναι ακίνητο στη θέση $r = 0$.

α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο.

β) Ποια είναι η θέση ισορροπίας και ποιο το είδος της ισορροπίας;

Β. Σε σωματίδιο μάζας $m = 2\ kg$ ασκείται δύναμη $\vec{F} = 5t\hat{i}\ (N)$ όπου t συμβολίζει το χρόνο. Αν το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, να βρεθεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη στα πρώτα 2 *s* της κίνησής του.

<u>Λύση</u>

Α. α) $\vec{F}(r) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\hat{r} = -D[br^{-2} + b^2(-2)r^{-3}]\hat{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{F}(r) = D\left(-\frac{b}{r^2} + \frac{2b^2}{r^3}\right)\hat{r}$$

β) Οι θέσεις ισορροπίας είναι εκείνες για τις οποίες:

$$\vec{F}(r) = 0 \Rightarrow D\left(-\frac{b}{r^2} + \frac{2b^2}{r^3}\right)\hat{r} = 0 \Rightarrow \frac{b}{r^2} = \frac{2b^2}{r^3} \Rightarrow r = 2b$$

Επομένως η θέση ισορροπίας είναι η $r = 2b$.

Για το χαρακτηρισμό της θέσης αυτής ελέγχουμε το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της $V(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = D[br^{-2} - 2b^2r^{-3}]$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2} = D[-2br^{-3} - 2b^2(-3)r^{-4}] = D\left(-\frac{2b}{r^3} + \frac{6b^2}{r^4}\right)$$

Για $r = 2b$:

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}r^2} = D\left(-\frac{2b}{8b^3} + \frac{6b^2}{16b^4}\right) = D\left(-\frac{1}{4b^2} + \frac{3}{8b^2}\right) = \frac{D}{8b^2} > 0\,.$$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο και επομένως η θέση $r = 2b$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

Β. *$1^{ος}$ τρόπος:*
Από το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας προκύπτει:

$$W_F = K_f - K_i = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad (1),$$

Από το $2^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα:

$$F = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \Rightarrow 5t = 2\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\upsilon = \frac{5}{2}t\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\mathrm{d}\upsilon = \frac{5}{2}\int_0^t t\mathrm{d}t \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{5}{4}t^2 \quad (2)$$

Επομένως η ταχύτητα του σωματιδίου για $t = 2\ s$ θα είναι $\upsilon = 5\ m/s$.
Άρα αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε:
$W_F = 25\ J$

2^{ος} τρόπος:

$$W_F = \int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x 5t\mathrm{d}x = \int_0^t 5t\upsilon(t)\mathrm{d}t \quad (3)$$

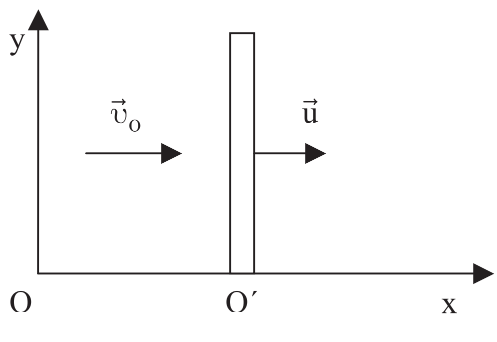
Αντικαθιστώντας την (2) στην (3) προκύπτει:

$$W_F = \int_0^t 5t\frac{5}{4}t^2\mathrm{d}t = \frac{25}{4}\int_0^t t^3\mathrm{d}t = \frac{25}{16}t^4$$

Για $t = 2\ s$, $W_F = 25\ J$

ΘΕΜΑ 3

Κατακόρυφο τοίχωμα πολύ μεγάλης μάζας (πρακτικά άπειρης) κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{u} = u\hat{i}$. Σωματίδιο μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o = \upsilon_o\hat{i}$ ($\upsilon_o > |u| > 0$) συγκρούεται με το τοίχωμα ελαστικά. Υπολογίστε τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου εάν α) το τοίχωμα κινείται προς τα δεξιά (u > 0) και β) το τοίχωμα κινείται προς τα αριστερά (u<0).



Λύση
α) Στο σύστημα O΄ (που κινείται μαζί με το τοίχωμα) το σωματίδιο έχει ταχύτητα
$\upsilon'_o = \upsilon_o - u$.
Επειδή η κρούση είναι ελαστική η ταχύτητά του στο O΄ μετά την κρούση θα γίνει:
$\upsilon' = -\upsilon'_o = u - \upsilon_o$
Στο σύστημα O η νέα του ταχύτητα είναι :

$\upsilon = \upsilon' + u = 2u - \upsilon_o$

Αρχικά $E_o = \frac{1}{2} m\upsilon_o^2$

Τελικά $E = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m(2u - \upsilon_o)^2$. Επομένως

$\Delta E = E - E_o = \frac{1}{2} m(2u - \upsilon_o)^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 = 2mu(\upsilon_o - u) < 0$

Άρα η κινητική του ενέργεια μειώνεται.

β) Ανάλογα παίρνουμε

$\upsilon_o' = \upsilon_o + u$

$\upsilon' = -\upsilon_o' = -\upsilon_o - u$

$\upsilon = \upsilon' - u = -\upsilon_o - 2u$

$E_o = \frac{1}{2} m\upsilon_o^2$

$E = \frac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{1}{2} m(2u + \upsilon_o)^2$

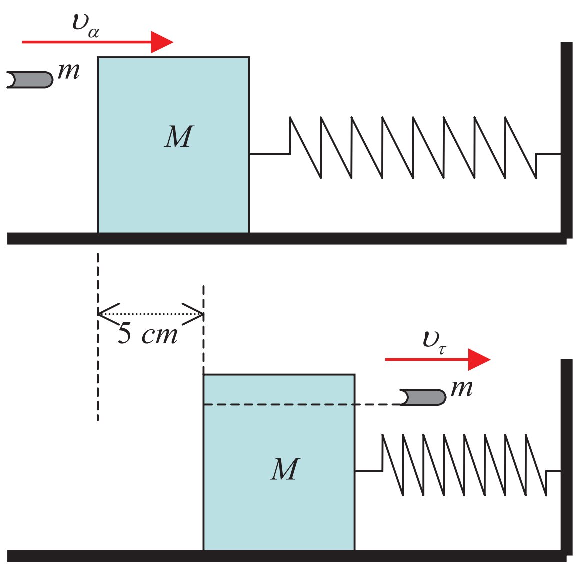
$\Delta E = E - E_o = -2mu(\upsilon_o + u) < 0$

Για $\upsilon_o >> u$ έχουμε $\Delta E = -2m\upsilon_o u$

ΘΕΜΑ 4

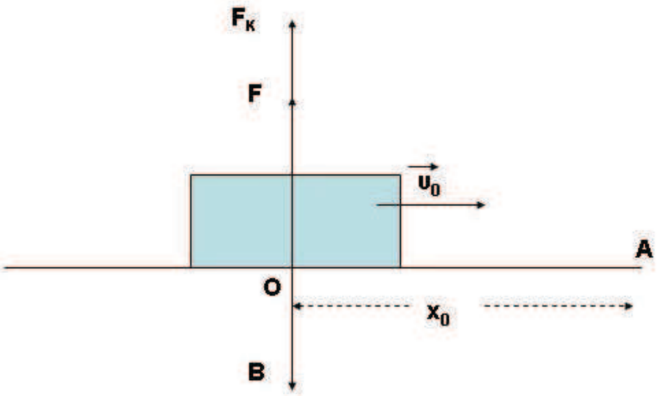
Α. Σώμα μάζας *m* είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής *n*=0.3. Στο σώμα προσδίδεται οριζόντια ταχύτητα υ_0=10m/s και ταυτόχρονα αρχίζει να του ασκείται δύναμη κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω που το μέτρο της δίδεται από τη σχέση *F=kx*, όπου *k*=0.4 *N/m* και *x* είναι το διάστημα που διανύει το σώμα στο οριζόντιο επίπεδο. Διαπιστώνεται ότι τη στιγμή που το σώμα εγκαταλείπει το επίπεδο η οριζόντια ταχύτητά του είναι η μισή της αρχικής. Ζητείται η μάζα του σώματος.
Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.

Β. Σώμα μάζας $M = 1.0\ kg$ βρίσκεται σε ηρεμία πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές και από τη μία πλευρά του είναι συνδεδεμένο σε αβαρές ελατήριο σταθεράς $k = 900$ N/m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σφαίρα μάζας $m = 5.0\ g$ και αρχικής ταχύτητας $\upsilon_\alpha = 400$ m/s συγκρούεται και διαπερνά το σώμα εξερχόμενη με ταχύτητα υ_τ. Το σώμα διανύει απόσταση $x = 5.0\ cm$ μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία. (Όλες οι κινήσεις είναι κατά μήκος του άξονα x)
Υπολογίστε:
α) την ταχύτητα με την οποία εξήλθε η σφαίρα.
β) τη διαφορά μηχανικής ενέργειας του συστήματος μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης.



<u>Λύση</u>

Α.



Έστω ότι το σώμα εγκαταλείπει το επίπεδο στη θέση Α διανύοντας διάστημα x_0 .
Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για τη διαδρομή Ο→Α έχουμε:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = W_T \Rightarrow -\frac{3}{8}m\upsilon_0^2 = W_T \quad (1)$$

Η τριβή Τ δίνεται από τη σχέση $T = nF_K$, όπου F_K η δύναμη που δέχεται το σώμα από το επίπεδο. Η δύναμη αυτή προσδιορίζεται από τη σχέση :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_K + F = B \Rightarrow F_K = mg - kx$$

Με συνδυασμό των δύο προηγούμενων σχέσεων προκύπτει ότι η τριβή είναι μεταβλητή δύναμη μέτρου:

$$T = n(mg - kx) \quad (2)$$

Επιπλέον επειδή στη θέση (Α) το σώμα χάνει την επαφή του με το επίπεδο ισχύει :

$$F_K = 0 \Rightarrow mg - kx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k}$$

Άρα το έργο που καταναλώνει η τριβή είναι:

$$W_T = -\int_0^{mg/k} n(mg - kx)dx \Rightarrow W_T = -\frac{nm^2 g^2}{2K} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει για τη μάζα του σώματος: m=1 kg

Β. α) Κατά τη στιγμή της εξόδου της σφαίρας to σώμα θα έχει αποκτήσει ταχύτητα V. Από την αρχή διατήρησης της ορμής θα έχουμε :

$$m\upsilon_\alpha = MV + m\upsilon_\tau \qquad (1)$$

Το σώμα θα κινηθεί επιβραδυνόμενο μέχρι να ακινητοποιηθεί στιγμιαία, οπότε το ελατήριο θα έχει συσπειρωθεί κατά $x = 5.0\ cm$. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα σώμα-ελατήριο παίρνουμε :

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2)$$

Από τη (2) βρίσκουμε την V :

$$V = \sqrt{\frac{kx^2}{M}} = \sqrt{\frac{(900\ N/m)\cdot(5.0\times10^{-2}\ m)^2}{1.0\ kg}} =...=1.5\ m/s \qquad (3)$$

Από την εξίσωση (1) και με αντικατάσταση της τιμής του V υπολογίζουμε την τελική ταχύτητα της σφαίρας :

$$\upsilon_\tau = \frac{m\upsilon_\alpha - MV}{m} = \frac{(5.0\times10^{-3}\ kg)\cdot(400\ m/s) - (1.0\ kg)\cdot(1.5\ m/s)}{5.0\times10^{-3} kg} = 100\ m/s \qquad (4)$$

β) Αρχική μηχανική ενέργεια του συστήματος :

$$E_\alpha = \frac{1}{2}m\upsilon_\alpha^2 = \frac{1}{2}(5.0\times10^{-3}\ kg)\cdot(400\ m/s)^2 = 400\ J \qquad (5)$$

Τελική μηχανική ενέργεια :

$$E_\tau = \frac{1}{2}m\upsilon_\tau^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(5.0\times10^{-3}\ kg)\cdot(100\ m/s)^2 + \frac{1}{2}(900\ N/m)\cdot(5.0\times10^{-2}\ m)^2$$

$$\approx 25\ J + 1\ J = 26\ J \qquad (6)$$

Οπότε οι απώλειες μηχανικής ενέργειας είναι :

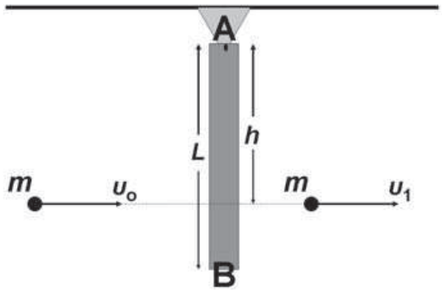
$$\Delta E = E_\alpha - E_\tau = 400J - 26J = 374\ J$$

ΘΕΜΑ 5

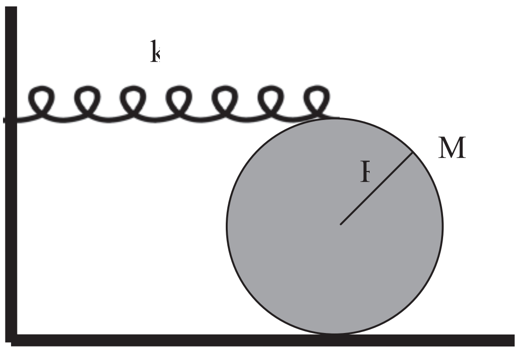
Α. Μια ράβδος μήκους L μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το ένα άκρο της Α. Αρχικά η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση και είναι ακίνητη. Υλικό σημείο μάζας m προσκρούει στη ράβδο με οριζόντια ταχύτητα υ_o , ενώ βγαίνει από αυτή με οριζόντια ταχύτητα υ_1. Το σημείο πρόσκρουσης βρίσκεται σε απόσταση h από το άκρο Α.

(α) Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα με την οποία αρχίζει να κινείται η ράβδος.

(β) Να βρείτε την ταχύτητα του άκρου Β τη στιγμή την οποία αρχίζει να κινείται η ράβδος. (Δίνεται για τη ράβδο: $I = \frac{1}{3}ML^2$)



B. Η κορυφή ενός ομογενούς κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου με σταθερά k, ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι κολλημένο σε κατακόρυφο τοίχο, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Αν ο κύλινδρος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, να υπολογίσετε την περίοδο μικρών ταλαντώσεων του κέντρου μάζας του κυλίνδρου γύρω από την θέση ισορροπίας. (*Υπόδειξη:* Να λάβετε υπόψη ότι σε ένα κύλινδρο που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει η μετατόπιση ενός σημείου του κυλίνδρου στην κορυφή του είναι διπλάσια της μετατόπισης του κέντρου του)



Λύση

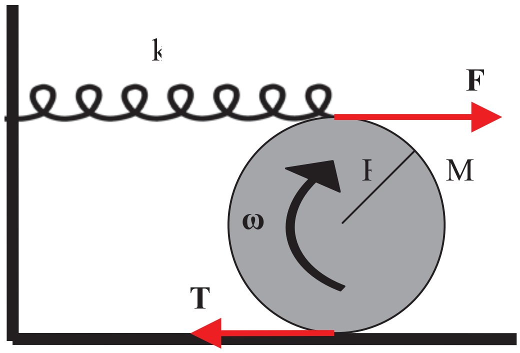
A.

α) Από διατήρηση στροφορμής ως προς το σημείο Α:

$$m\upsilon_o h = m\upsilon_1 h + I\omega \Rightarrow m\upsilon_o h = m\upsilon_1 h + \frac{1}{3}ML^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{3mh(\upsilon_o - \upsilon_1)}{ML^2}$$

β) $\upsilon_B = \omega L = \dfrac{3mh(\upsilon_o - \upsilon_1)}{ML}$

B. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου,F, και η δύναμη της τριβής από το δάπεδο, Τ. Την κάθετη αντίδραση από το δάπεδο, καθώς και το βάρος του κυλίνδρου τις αγνοούμε εφόσον δίνουν συνισταμένη μηδέν.



Η κίνηση του κέντρου μάζας ακολουθεί τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$M\ddot{x} = F - T \tag{1}$$

Θεωρούμε τα γωνιακά μεγέθη να είναι θετικά όταν έχουν φορά όπως δείχνεται στο Σχήμα, ενώ τα γραμμικά μεγέθη να είναι θετικά όταν τα αντίστοιχα διανύσματα έχουν φορά προς τα δεξιά. Εφόσον ο κύλινδρος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει έχουμε:

$$\dot{x} = R\omega \tag{2}$$

Η ροπή που ασκείται στον κύλινδρο ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του, οπότε:

$$R(F + T) = I\dot{\omega} \tag{3}$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (2) και (3) λύνοντας ως προς την δύναμη της τριβής:

$$T = I\frac{\ddot{x}}{R^2} - F$$

και αντικαθιστούμε στην (1):

$$(M + \frac{I}{R^2})\ddot{x} = 2F \tag{4}$$

Η δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου ισούται με :

$$F = -kx_t\,,$$

όπου x_t η μετατόπιση του σημείου στην κορυφή του κυλίνδρου όπου είναι δεμένο το ελατήριο. Αυτή είναι διπλάσια της μετατόπισης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, x, οπότε η δύναμη επαναφοράς θα είναι:

$$F = -2kx$$

Αντικαθιστούμε στην (4) και έχουμε:

$$(M + \frac{I}{R^2})\ddot{x} = -4kx \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{4kR^2}{I + MR^2}x = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{8}{3}\frac{k}{M}x = 0\,, \tag{5}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I = \frac{1}{2}MR^2$

Από την εξίσωση κίνησης (5) έχουμε ότι η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων θα ισούται με:

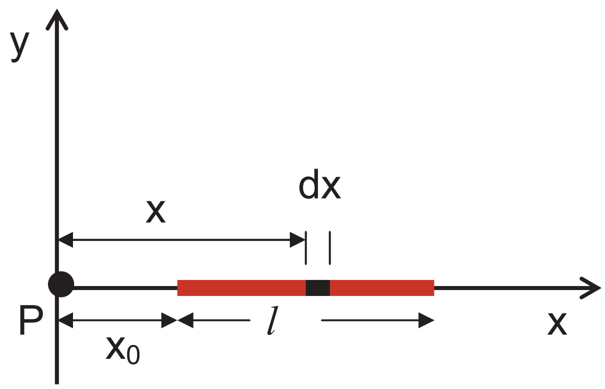
$$P = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{8k}}\,.$$

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

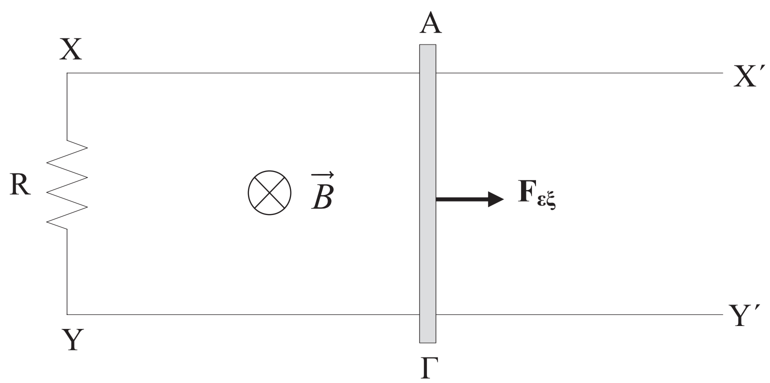
ΘΕΜΑ 1

Α. Μια μονωτική ράβδος μήκους *l* φέρει ομογενώς κατανεμημένο θετικό φορτίο *Q* και είναι διατεταγμένη κατά μήκος του άξονα x όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο (μέτρο και διεύθυνση) σε σημείο P επί του άξονα x και σε απόσταση x_0 από το άκρο της. Εάν το P βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από την κατανομή πόσο γίνεται το πεδίο; Τι παρατηρείτε;



Β. Δίδεται το κύκλωμα του σχήματος. Η ράβδος ΑΓ, μήκους l =1m, ηρεμεί και μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω στους οριζόντιους αγωγούς xx' και yy'. Η αντίσταση R έχει τιμή 4Ω και το ομογενές μαγνητικό πεδίο B =1 Tesla. Κάποια χρονική στιγμή, στη ράβδο ασκείται σταθερή δύναμη $F_{εξ}$= 2N.

1. Να δείξετε ότι η ράβδος θα αποκτήσει τελικά μια σταθερή οριακή ταχύτητα. Να υπολογιστεί η τιμή της οριακής ταχύτητας. Να γίνει η γραφική παράσταση του $E_{επ}$=f(u).
2. Από την χρονική στιγμή που η ράβδος απέκτησε την οριακή της ταχύτητα και μετά, να βρεθούν το φορτίο Q και η ηλεκτρική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα σε χρόνο Δt=10s.



Λύση

A.

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου δίνεται από $\lambda = Q\,/\,l$. Το φορτίο που περιέχεται στο απειροστό μήκος dx είναι $dq = \lambda\, dx$. Αφού η κατανομή φέρει θετικό φορτίο το πεδίο στο P κατευθύνεται προς την αρνητική διεύθυνση x. Το πεδίο d**E** που οφείλεται στο dq είναι

$$d\mathrm{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2}\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qdx}{lx^2}\hat{i}$$

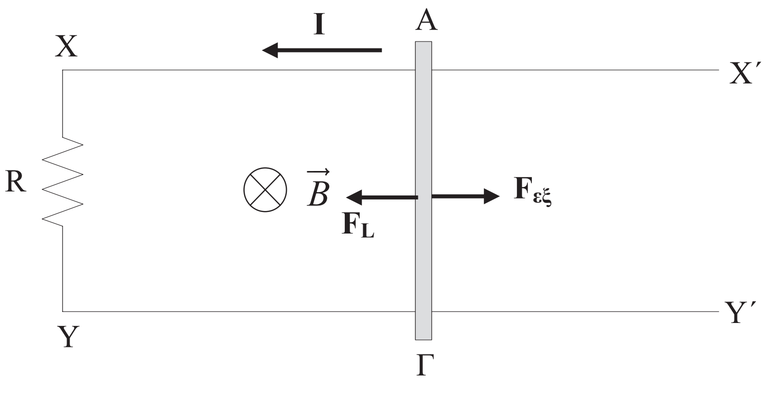
Ολοκληρώνοντας για όλο το μήκος της κατανομής έχουμε

$$\boldsymbol{E} = \int d\mathrm{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\hat{i}\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{l}\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0+l}\right)\hat{i} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x_0\left(x_0+l\right)}\hat{i}$$

Όταν $x_0 >> l$ τότε

$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x_0^2}\hat{i}$. Το πεδίο σε αυτή την περίπτωση είναι ως να προέρχεται από σημειακό φορτίο.

B.



1) Υπό την επίδραση της εξωτερικής δύναμης η ράβδος αρχίζει να κινείται αποκτώντας επιτάχυνση. Η κίνηση όμως αυτή έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρεγερτικής δύναμης $E_{επ}$ από επαγωγή στα άκρα της ράβδου. Επομένως το κύκλωμα αρχίζει και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα φοράς η οποία σημειώνεται στο σχήμα. Εξαιτίας του ρεύματος στην ράβδο εμφανίζεται δύναμη Laplace φοράς αντίθετης από την φορά της εξωτερικής δύναμης. Το μέτρο της δύναμης Laplace αυξάνεται με την αύξηση της ταχύτητας της ράβδου. Την χρονική στιγμή κατά την οποία ισχύει:

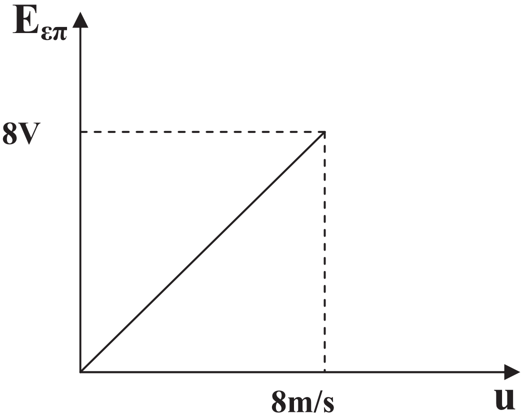
$F_L = F_{\varepsilon\xi}$

Το μέτρο της ταχύτητας της ράβδου σταματά να αυξάνει και παραμένει σταθερό. Από την χρονική στιγμή αυτή και μετά η κίνηση της ράβδου είναι ευθύγραμμη και ομαλή.

Έχουμε:

$$F_L = F_{\varepsilon\xi} \Rightarrow BIL = F_{\varepsilon\xi} \Rightarrow B\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R}L = F_{\varepsilon\xi} \Rightarrow B\frac{BuL}{R}L = F_{\varepsilon\xi} \Rightarrow u = \frac{F_{\varepsilon\xi}\cdot R}{B^2\cdot L^2} = 8m/s$$

Έχουμε: $E_{\varepsilon\pi} = BuL$



3) Από τη στιγμή κατά την οποία η ράβδος αποκτά οριακή ταχύτητα το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης $I = \frac{Bu_oL}{R} = 2A$.

Επομένως το ηλεκτρικό φορτίο το οποίο περνά από μία διατομή του κυκλώματος σε χρόνο 10s θα είναι: $Q = I\cdot\Delta t = 20Cb$

Η ηλεκτρική ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα στο ίδιο χρονικό διάστημα είναι: $Q = I^2\cdot R\cdot\Delta t = 160J$.

ΘΕΜΑ 2

Α. Συμπαγής αγώγιμη φορτισμένη σφαίρα ακτίνας α και φορτίου Q, περιβάλλεται από αγώγιμο σφαιρικό φλοιό ακτίνας b και φορτίου –Q.

Να υπολογιστούν κατά σειρά:

α. Το ηλεκτρικό πεδίο 1) στο εσωτερικό της συμπαγούς σφαίρας, 2) μεταξύ των δύο σφαιρών και 3) εκτός του συστήματος των σφαιρών.

β. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρικών αγωγών και

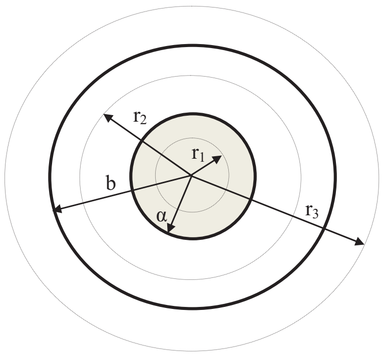
γ. Η χωρητικότητα του συστήματος.

Β. Κοίλος κυλινδρικός αγωγός, εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής ακτίνας β, διαρρέεται από ρεύμα I_0, ομογενώς κατανεμημένο. Αποδείξτε ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου εντός του αγωγού (α<r<β), δίνεται από τη σχέση

$$B = \frac{\mu_o I_o \left(r^2 - \alpha^2\right)}{2\pi\left(\beta^2 - \alpha^2\right) r}$$

<u>Λύση</u>

Α.



α.

(1) Θεωρώντας μία γκαουσιανή επιφάνεια στο εσωτερικό της συμπαγούς σφαίρας βλέπουμε ότι αυτή δεν περικλείει φορτίο, αφού στους αγωγούς όλο το φορτίο συγκεντρώνεται στην επιφάνεια τους. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου τότε θα είναι

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \text{οπότε και } E=0$$

(2) Θεωρώντας μία γκαουσιανή επιφάνεια μεταξύ των δύο σφαιρών ($\alpha<r<b$) θα έχουμε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS \cos 0^o = E\, 4\pi r^2 \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{+Q}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{+Q}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = k\frac{Q}{r^2}$$

(3) Θεωρώντας μία γκαουσιανή επιφάνεια εκτός των δύο σφαιρών ($r>b$) θα έχουμε

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint E\, dS \cos 0^o = E\, 4\pi r^2 \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{+Q-Q}{\varepsilon_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

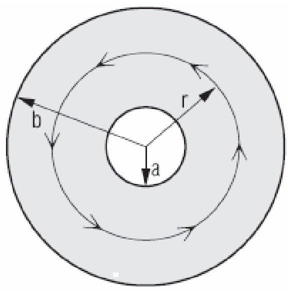
β. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρών είναι

$$V_b - V_a = -\int \vec{E} d\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} Q \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} Q \left[-\frac{1}{r}\right]_a^b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = kQ\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

γ. Η χωρητικότητα δίνεται γενικά από τον τύπο C=Q/V που στην περίπτωσή μας γίνεται

$$C = \frac{Q}{|V_b - V_a|} = \frac{Q}{\dfrac{kQ}{\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)}} = \frac{ab}{k(b-a)}$$

B.



Το ρεύμα διαρρέει τον αγωγό στο μή κοίλο τμήμα του, η διατομή του οποίου είναι $\pi(\beta^2 - \alpha^2)$. Άρα ο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα πυκνότητας

$$\frac{I_o}{\pi\left(\beta^2 - \alpha^2\right)}$$

Έστω ο κύκλος ακτίνας r (r > α). Το ρεύμα το οποίο περικλείει αυτή η κλειστή καμπύλη είναι:

$$I(r) = \int_S \frac{I_0}{\pi(\beta^2 - \alpha^2)} ds = \frac{I_0}{\pi(\beta^2 - \alpha^2)} \int_\alpha^r 2\pi r dr = \frac{I_0(r^2 - \alpha^2)}{(\beta^2 - \alpha^2)}$$

Ως εκ τούτου, ο νόμος Ampère γράφεται:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \frac{\mu_0 I_0(r^2 - \alpha^2)}{(\beta^2 - \alpha^2)} \Rightarrow B2\pi r = \frac{\mu_0 I_0(r^2 - \alpha^2)}{(\beta^2 - \alpha^2)} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0(r^2 - \alpha^2)}{2\pi r(\beta^2 - \alpha^2)}$$

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Δίνονται $\vec{a} = \hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

a. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{c}$ που είναι κάθετο στα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ τέτοιο ώστε $\vec{c}\cdot\hat{k} > 0$ και $|\vec{c}| = 10\sqrt{3}$.
b. Να ευρεθεί το εμβαδόν του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$.
c. Δίνεται $\vec{d} = -\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$. Να βρεθούν οι πραγματικοί λ, μ και ν τέτοιοι ώστε $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

Λύση

(a) Το ζητούμενο διάνυσμα είναι παράλληλο στο $\vec{\alpha}\times\vec{b}$:

$$\vec{\alpha}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}-5\hat{j}-7\hat{k}$$

¨Αρα $\vec{c} = \kappa\left(\vec{\alpha}\times\vec{b}\right) = \kappa\hat{i}-5\kappa\hat{j}-7\kappa\hat{k}$

$\vec{c}\hat{k} = -7\kappa > 0 \Rightarrow \kappa < 0$

και

$\left|\vec{c}\right|^2 = \kappa^2\left(1+25+49\right) = 75\kappa^2 = 300 \Rightarrow \kappa^2 = 4$

Άρα $\kappa = -2$ και $\vec{c} = -2\hat{i}+10\hat{j}+14\hat{k}$

(b) Το εμβαδόν ισούται με :

$E=2(E_1+E_2+E_3)$ όπου

$E_1 = \left|\vec{\alpha}\times\vec{b}\right|, E_2 = \left|\vec{\alpha}\times\vec{c}\right|, E_3 = \left|\vec{c}\times\vec{b}\right|$

Έχουμε υπολογίσει από το (α) $\vec{\alpha}\times\vec{b} = -2\hat{i}+10\hat{j}+14\hat{k}$, άρα $E_1 = \sqrt{75}$

Ομοίως υπολογίζουμε $E_2 = \left|\vec{\alpha}\times\vec{c}\right| = \sqrt{4200}$

$E_3 = \left|\vec{c}\times\vec{b}\right| = \sqrt{1800}$

Άρα $E_{ολ}=2(\sqrt{75}+\sqrt{4200}+\sqrt{1800}$

(γ′) Από τη σχέση $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ παίρνουμε

$\lambda(\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}) + \mu(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) + \nu(-2\hat{i}+10\hat{j}+14\hat{k}) = -\hat{i}+2\hat{j}$-

από την οποία προκύπτει στο σύστημα

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu - 2\nu &= -1 \\ 3\lambda - \mu + 10\nu &= 2 \\ -2\lambda + \mu + 14\nu &= -3 \end{aligned}$$

για τη λύση του οποίου υπολογίζουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 10 \\ -2 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -150$$

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 10 \\ -3 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -90$$

$$\Delta_\mu = 130 \qquad \Delta_\nu = 10$$

οπότε

$$\lambda = \frac{\Delta_\lambda}{\Delta} = \frac{3}{5}, \qquad \mu = \frac{\Delta_\mu}{\Delta} = -\frac{13}{15}, \qquad \nu = \frac{\Delta_\nu}{\Delta} = -\frac{1}{15}$$

ΘΕΜΑ 2

A. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(α) I= $\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx$ (β) $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(Υπόδειξη: $I_2 = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a^2}\right|$

B. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\ln x + y^2 = 1$ στο σημείο $(x_o, y_o) = (1,1)$

<u>Λύση</u>

A.

(α) Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της αντικατάστασης: $x^2+4x-6 = u$. Επομένως $(2x+4)dx = du$ και τελικά $(x+2)dx=(1/2)du$. Το αρχικό ολοκλήρωμα επομένως γίνεται:

$$I = \frac{1}{2}\int \sin u du$$

Το οποίο βέβαια είναι –(1/2) cosu + C

Αντικαθιστώντας το $u = x^2+4x-6$ στην λύση έχουμε τελικά:

$$I = -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 4x - 6) + C$$

(β) Κάνουμε απλές αλγεβρικές πράξεις για να φέρουμε το ολοκλήρωμα στην μορφή που θέλουμε:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι εύκολο να βρεθεί με απλή αντικατάσταση $u=x^2+x+1$ και επομένως $du=(2x+1)dx$, επομένως

$$\frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{x^2+x+1} + C_1$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα δίνεται σημαντική βοήθεια εξ αρχής, αρκεί να μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα σε μορφή που μας δίνεται η λύση του στην εκφώνηση. Αυτό είναι εύκολο αν αναγνωρίσουμε ότι $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$. Και πάλι για λόγους ευκολίας μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $u = x + \frac{1}{2}$ και $a^2 = \frac{3}{4}$, οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται $-\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$ του οποίου η λύση είναι. Επομένως το αρχικό ολοκλήρωμα είναι: $-\ln|u + \sqrt{u^2+a^2}| + C_2 = \ln|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}| + C_2$

$$I = \sqrt{x^2+x+1} - \ln|x + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}| + C = \sqrt{x^2+x+1} - \ln|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}| + C$$

Όπου βέβαια $C = C_1 + C_2$.

B. $\left(\ln x + y^2 = 1\right)' \Rightarrow \frac{1}{x} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2xy}$

Η εφαπτομένη είναι της μορφής :

$$y - y_o = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_o, y_o)} (x - x_o)$$

με $x_o = 1, y_o = 1$ και $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_o, y_o)} = -\frac{1}{2}$ βρίσκουμε

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x$$

ΘΕΜΑ 3

Α. Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_a^b x^3\cdot\cos x\cdot dx$ αν τα όρια ολοκληρώσεως είναι:

(α) α = 0, b = π και (β). α = -π/2, b = π/2

Β. Υπολογίστε την παράγωγο dy/dx της εξίσωσης

$$(x\cdot y)^2+x^2\cdot y^3+x^3\cdot y^2=0$$

<u>Λύση</u>

Α.

Υπολογίζουμε κατ' αρχήν το ολοκλήρωμα :

$$\int_a^b x^3\cdot\cos x\cdot dx=\int_a^b x^3\cdot d\sin x=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b-\int_a^b\sin x\cdot dx^3=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b-\int_a^b\sin x\cdot 3\cdot x^2\cdot dx=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b-3\cdot\int_a^b x^2\cdot\sin x\cdot dx=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\int_a^b x^2\cdot d\cos x=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-3\cdot\int_a^b\cos x\cdot dx^2=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-6\cdot\int_a^b x\cdot\cos x\cdot dx=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-6\cdot\int_a^b x\cdot d\sin x=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-6\cdot\left|x\cdot\sin x\right|_a^b+6\cdot\int_a^b\sin x\cdot dx=$$

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_a^b+3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_a^b-6\cdot\left|x\cdot\sin x\right|_a^b-6\cdot\left|\cos x\right|_a^b$$

(α). Ο πρώτος και ο τρίτος όρος ισούται με 0 (ή το x=0 ή το sinπ=0). Συνεπώς:

$$=3\cdot\left|x^2\cdot\cos x\right|_0^\pi-6\cdot\left|\cos x\right|_0^\pi=3\cdot\pi^2\cdot(-1)-6\cdot(-1)+6\cdot1=12-3\cdot\pi^2$$

(β). Ο δεύτερος και τέταρτος όρος ισούται με 0 (cos(-π/2) = cos(π/2) = 0). Συνεπώς:

$$=\left|x^3\cdot\sin x\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}-6\cdot\left|x\cdot\sin x\right|_{-\pi/2}^{\pi/2}=$$

$$=(\pi/2)^3\cdot\sin\pi/2-(-\pi/2)^3\cdot\sin(-\pi/2)-6\cdot(\pi/2)\cdot\sin\pi/2+6\cdot(-\pi/2)\cdot\sin(-\pi/2)=$$

$$= (\pi/2)^3 \cdot 1 + (\pi/2)^3 \cdot (-1) - 6 \cdot (\pi/2) \cdot 1 + 6 \cdot (-\pi/2) \cdot (-1) = 0$$

B. Παραγωγίζουμε την συνάρτηση ως προς x. Εχουμε:

$$\frac{d\left((x \cdot y)^2 + x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y^2\right)}{dx} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d\left((x \cdot y)^2 + x^2 \cdot y^3 + x^3 \cdot y^2\right)}{dx} = \frac{d\left((x \cdot y)^2\right)}{dx} + \frac{d\left(x^2 \cdot y^3\right)}{dx} + \frac{d\left(x^3 \cdot y^2\right)}{dx} =$$

$$= 2 \cdot (x \cdot y) \cdot \left(x \cdot \frac{d(y)}{dx} + y \cdot \frac{dx}{dx} \right) + x^2 \cdot \frac{d(y^3)}{dx} + y^3 \cdot \frac{d(x^2)}{dx} + x^3 \cdot \frac{d(y^2)}{dx} + y^2 \cdot \frac{d(x^3)}{dx} =$$

$$= 2 \cdot (x \cdot y) \cdot \left(x \cdot \frac{dy}{dx} + y \right) + x^2 \cdot 3 \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y^3 \cdot 2 \cdot x + x^3 \cdot 2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + y^2 \cdot 3 \cdot x^2 =$$

$$= 2 \cdot x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \cdot x \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 2 \cdot x \cdot y^3 + 2 \cdot x^3 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 =$$

$$= \left(2 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 + 2 \cdot x^3 \cdot y\right) \cdot \frac{dy}{dx} + \left(2 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot x \cdot y^2 + 2 \cdot x \cdot y^3 + 3 \cdot x^2 y^2}{2 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 + 2 \cdot x^3 \cdot y} \equiv -\frac{2 \cdot y + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot x\ y}{2 \cdot x + 3 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x^2}}$$

Εισαγωγή στις Φυσικές Επιστήμες (28-7-2007) **Μηχανική**

Ονοματεπώνυμο

Τμήμα

ΘΕΜΑ 1

Α. Υλικό σώμα μάζας m βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο με μέγιστο συντελεστή στατικής τριβής η και συντελεστή τριβής ολίσθησης μ. Τη χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζει να ενεργεί στο σώμα προωστική δύναμη της μορφής $F(t)=\lambda^2 mt$. Μετά από πόσο χρόνο αρχίζει να κινείται το σώμα; Ποια η ταχύτητά του και ποιο το διάστημα που διανύει συναρτήσει του χρόνου;
Β. Ένα άδειο όχημα έχει αρχικά μάζα M_0 και κινείται ευθύγραμμα πάνω σε τροχιές που βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς τριβές με ταχύτητα u_0. Όταν βρεθεί στη θέση x=0 αρχίζει να πέφτει χιόνι με σταθερό ρυθμό b Kg/s . Υπολογίστε α) τη ταχύτητα που θα αποκτήσει το όχημα σαν συνάρτηση της προστιθέμενης μάζας του χιονιού β)τη θέση του οχήματος σαν συνάρτηση του χρόνου.

<u>Λύση</u>

Α. ο σώμα αρχίζει να κινείται όταν η προωστική δύναμη γίνει ίση με τη δύναμη της τριβής. Έχουμε δηλαδή

$$F_{o\rho}=T\Rightarrow \lambda^2 mt_0=\eta mg\Rightarrow t_0=\frac{\eta g}{\lambda^2} \tag{1}$$

Άρα το σώμα αρχίζει να κινείται μετά από χρόνο $t_0=\dfrac{\eta g}{\lambda^2}$.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου χρησιμοποιούμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Έχουμε

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F-T=\lambda^2 mt-\mu mg\Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt}=\lambda^2 t-\mu g \tag{2}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (2) προκύπτει ότι

$$\upsilon(t)=\frac{1}{2}\lambda^2\left(t-t_0\right)^2-\mu g\left(t-t_0\right)+C \tag{3}$$

Εφόσον για $t=t_0$ έχουμε $\upsilon=0$ (τότε αρχίζει να κινείται το σώμα) θα είναι $C=0$. Επομένως έχουμε τελικά

$$\upsilon(t)=\frac{1}{2}\lambda^2(t-t_0)^2-\mu g(t-t_0) \tag{4}$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. (4) ως προς το χρόνο προκύπτει ότι το διάστημα που διανύει το σώμα συναρτήσει του χρόνου είναι

$$x(t)=\int\upsilon(t)dt=\int\frac{1}{2}\lambda^2(t-t_0)^2\,dt-\int\mu g(t-t_0)dt=$$
$$\frac{1}{6}\lambda^2(t-t_0)^3-\frac{1}{2}\mu g(t-t_0)^2 \tag{6}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=0$.

Β. Θεωρούμε ότι το χιόνι αρχίζει να πέφτει στο όχημα τη χρονική στιγμή t=0. Έστω ότι σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή η μάζα του χιονιού που θα έχει εναποτεθεί στο όχημα είναι m.

$$\vec{p}(t)=(M_0+m)\vec{u}$$
$$\vec{p}(t+dt)=(M_0+m+dm)(\vec{u}+d\vec{u})$$
$$d\vec{p}=(M_0+m)d\vec{u}+\vec{u}dm$$

Εφόσον δεν υπάρχουν εξωτερικές δυνάμεις έχουμε:

$$(M_0+m)\frac{du}{dt}+u\frac{dm}{dt}=0$$

$$-\frac{du}{u}=\frac{dm}{M_0+m}\Rightarrow-\int_{u_0}^{u}\frac{du}{u}=\int_0^m\frac{dm}{M_0+m}\Rightarrow$$

$$-\ln\frac{u}{u_0}=\ln\frac{M_0+m}{M_0}\Rightarrow\frac{u_0}{u}=\frac{M_0+m}{M_0}\Rightarrow u=\frac{M_0u_0}{M_0+m}$$

Γνωρίζουμε ότι $u=dx/dt$. Επομένως έχουμε:

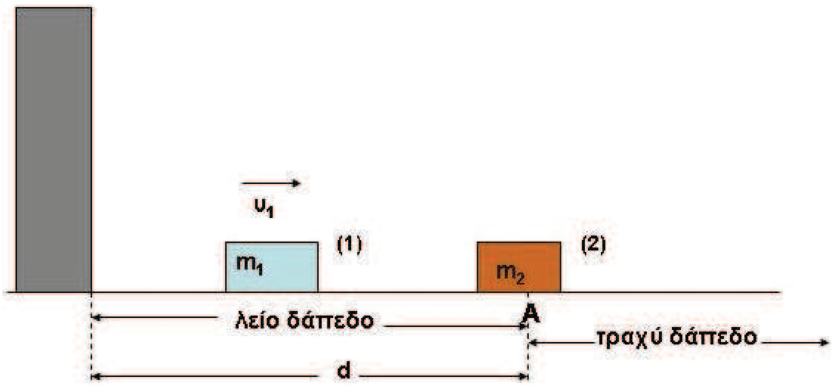
$$\frac{dx}{dt}=\frac{M_0u_0}{M_0+bt}\Rightarrow dx=M_0u_0\frac{dt}{M_0+bt}\Rightarrow\int_0^x dx=M_0u_0\int_0^t\frac{dt}{M_0+bt}$$

Ολοκληρώνοντας καταλήγουμε:

$$x=\ln\frac{M_0u_0}{b}\ln\frac{M_0+bt}{M_0}$$

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα φαίνονται δύο σώματα (1) και (2), με μάζες m_1=2 *kg* και m_2=8 kg αντίστοιχα, τα οποία αρχικά είναι ακίνητα σε οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα (2) βρίσκεται στο σημείο Α δεξιά του οποίου το δάπεδο είναι τραχύ ενώ αριστερά είναι λείο. Σε απόσταση *d*=18 *m* αριστερά του σημείου Α βρίσκεται κατακόρυφος τοίχος. Εκτοξεύουμε το σώμα (1) με οριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, όπως στο σχήμα και τη χρονική στιγμή *t*=0 αυτό συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το ακίνητο σώμα (2). Μετά την κρούση το σώμα (2) κινείται στο τραχύ επίπεδο με το οποίο εμφανίζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0.2 και σταματά αφού διανύσει διάστημα s_2=4 *m*. Να υπολογιστεί α) το μέτρο της ορμής του σώματος (2) αμέσως μετά την κρούση των δύο σωμάτων β) η κινητική ενέργεια του σώματος (1) ελάχιστα πριν την κρούση με το σώμα (2) γ) η απόσταση των δύο σωμάτων ελάχιστα πριν την ελαστική κρούση του σώματος (1) με τον κατακόρυφο τοίχο δ) να διερευνήσετε εάν θα γίνει και δεύτερη κρούση μεταξύ των σωμάτων (1) και (2) θεωρώντας γνωστό ότι και τα δύο σώματα εμφανίζουν με το τραχύ δάπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης. Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10 m/s^2.



<u>Λύση</u>

α) Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά και αποκτούν ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$ και $\vec{\upsilon}_2'$ αντίστοιχα. Το σώμα (2) μετά την κρούση κινείται στο τραχύ επίπεδο. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για την κίνησή του από το σημείο Α μέχρι το σημείο Γ όπου σταματά έχουμε:

$$K_\Gamma - K_A = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = -T_2 s_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \mu N_2 s_2 = \mu m_2 g s_2 \Rightarrow \upsilon_2' = 4 \ \ m/s$$

Άρα η ορμή του σώματος (2) είναι

$$p_2' = m_2\upsilon_2' = 32 \text{ kg} \cdot m/s$$

β) Από την ελαστική μετωπική κρούση έχουμε:

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1 = 10 \ \ m/s \, .$$

Άρα η κινητική ενέργεια του σώματος (1) πριν την κρούση με το σώμα (2) είναι :

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^{\,2} = 100\ J$$

γ) Το σώμα (1) αμέσως μετά την κρούση με το σώμα (2) έχει ταχύτητα:

$\upsilon_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow \upsilon_1' = -6\ m/s$ και φτάνει στον τοίχο τη χρονική στιγμή $t_1 = \dfrac{d}{|\upsilon_1'|} = 3\ s$

Το σώμα (2) εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση, οπότε ισχύει:

$\upsilon = \upsilon_2' - a_2 t$, οπότε για υ=0 $t_2 = \dfrac{\upsilon_2'}{a_2}$ (1)

Η επιτάχυνσή του προσδιορίζεται από τη σχέση:
$T_2 = m_2 a_2 \Rightarrow \mu m_2 g = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = 2\ m/s^2$. Άρα από τη σχέση (1) το σώμα (2) σταματά τη χρονική στιγμή $t_2 = \dfrac{\upsilon_2'}{a_2} = 2\ s$. Επομένως τη χρονική στιγμή $t_1 = 3\ s$ (όπου το σώμα (1) έχει φτάσει στον τοίχο) το σώμα (2) απέχει από το σημείο Α απόσταση:

$s_2 = \upsilon_2' t_2 - \dfrac{1}{2} a_2 t_2^2 = 4\ m$. Άρα η απόσταση των δύο σωμάτων τη στιγμή που το σώμα (1) φτάνει στον τοίχο είναι: $d_1 = d + s_2 = 22\ m$

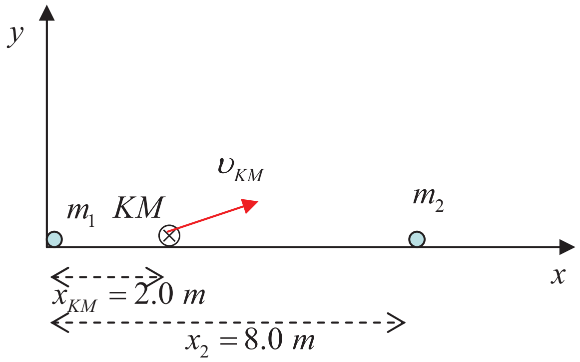
δ) Το σώμα (1) ανακλάται στον τοίχο ελαστικά συνεπώς επιστρέφει στο σημείο Α με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα $\upsilon_1' = 6 m/s$ και εισέρχεται στο τραχύ δάπεδο όπου εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Το διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει υπολογίζεται :

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_\Gamma = W_T \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 = -T_1 s_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1'^2 = \mu N_1 s_1 = \mu m_1 g s_1 \Rightarrow s_1 = \frac{\upsilon_1'^2}{2\mu g} = 9\ m$$

Επειδή $s_1 \succ s_2$ έπεται ότι το σώμα (1) θα συγκρουστεί με το σταματημένο σώμα (2).
.

ΘΕΜΑ 3

Α. Σε κάποια χρονική στιγμή, το κέντρο μάζας (ΚΜ) ενός συστήματος δύο σωματιδίων βρίσκεται πάνω στον άξονα x και σε απόσταση $x_{KM} = 2.0\ m$ από την αρχή ενώ η ταχύτητά του είναι $\vec{\upsilon}_{KM} = (4.0\ m/s)\hat{i} + (3.0\ m/s)\hat{j}$. Το ένα από τα δύο σωματίδια βρίσκεται πάνω στην αρχή των αξόνων. Το άλλο σωματίδιο έχει μάζα $m_2 = 0.10\ kg$ και στη συγκεκριμένη χρονική στιγμή βρίσκεται σε ηρεμία πάνω στον άξονα x και σε απόσταση $x_2 = 8.0\ m$. α) Ποια είναι η μάζα m_1 του σωματιδίου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων; β) Υπολογίστε το διάνυσμα και το μέτρο της ολικής ορμής του συστήματος. γ) Υπολογίστε το διάνυσμα και το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.



Β. Σωματίδιο Α συγκρούεται ελαστικά με σωματίδιο Β που βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία. Η αρχική και η τελική κίνηση γίνονται στην ίδια ευθεία. Ποιο είναι το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου Α;
Θεωρείστε ότι η μάζα του σωματιδίου Β είναι 1840 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του σωματιδίου Α.

__Λύση__

Α.

α) Από τη σχέση $x_{KM} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}$,($M \equiv m_1 + m_2$), που μας δίνει τη συντεταγμένη του κέντρου μάζας στον άξονα x ,και δεδομένου ότι $x_1 = 0\ m$, παίρνουμε :

$$m_1 = m_2\left(\frac{x_2}{x_{KM}} - 1\right) = (0.10\ kg)\left(\frac{8.0\ m}{2.0\ m} - 1\right) = 0.30\ kg$$

β) Η ολική ορμή του συστήματος δίνεται από τη σχέση: $\vec{P}_{KM} = M\vec{\upsilon}_{KM}$. Με αντικατάσταση παίρνουμε :

$$\vec{P}_{KM} = M\vec{\upsilon}_{KM} = (0.40\ kg)\left[(4.0\ m/s)\hat{i} + (3.0\ m/s)\hat{j}\right] = (1.6\ kg\cdot m/s)\hat{i} + (1.2\ kg\cdot m/s)\hat{j}$$

Το μέτρο της ολικής ορμής είναι:

$$\left|\vec{P}_{KM}\right| = M\left|\vec{\upsilon}_{KM}\right| = (0.40\ kg)\left(\sqrt{4^2 + 3^2}\ \ m/s\right) = 2.0\ kg\cdot m/s$$

γ) Από τη σχέση $M\vec{\upsilon}_{KM} = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2$ και δεδομένου ότι $\vec{\upsilon}_2 = 0$ παίρνουμε :

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{M}{m_1}\vec{\upsilon}_{KM} = \frac{0.40}{0.30}\left[(4.0\ m/s)\hat{i} + (3.0\ m/s)\hat{j}\right] = (5.3\ m/s)\hat{i} + (4.0\ m/s)\hat{j}$$

Το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας του σωματιδίου είναι :

$$\left|\vec{\upsilon}_1\right| = \frac{M}{m_1}\left|\vec{\upsilon}_{KM}\right| = \frac{0.40}{0.30}\cdot 5\ m/s = 6.7\ m/s$$

Β. Έστω m_1 η μάζα του σωματιδίου Α , m_2 η μάζα του σωματιδίου Β, u_1, u_2 οι αρχικές ταχύτητες τους αντίστοιχα και υ_1, υ_2 οι αντίστοιχες ταχύτητές τους μετά την κρούση.

Από τις αρχές διατήρησης ορμής και κινητικής ενέργειας παίρνουμε:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα και θέτοντας $u_2 = 0$ βρίσκουμε (βλ. «Εισαγωγική Φυσική –Κλασσική Μηχανική», Τόμος Β-Μέρος Β, σχέση 3.48 σελ. 58):

$$\upsilon_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1$$

Θέτοντας $m_2 = 1840m_1$, βρίσκουμε $\upsilon_1 = -\frac{1839}{1841}u_1$ (1)

Αν E_1, E_2 είναι η κινητική ενέργεια του σωματιδίου Α πριν και μετά την κρούση αντίστοιχα, το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου Α θα είναι:

$$Q = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{\frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2}{\frac{1}{2}m_1u_1^2} = 1 - \frac{\upsilon_1^2}{u_1^2} \quad (2)$$

Με αντικατάσταση της (1) στη (2) προκύπτει $Q = 0.0022$ ή 0.22%

ΘΕΜΑ 4

Α. Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος ξεκινούν από την ίδια θέση όπου βρίσκονταν σε ακινησία και κυλούν προς τα κάτω (χωρίς να ολισθαίνουν) στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο. Όταν θα διανύσουν το ίδιο μήκος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής. (*δίνεται: η ροπή αδρανείας σφαίρας μάζας Μ και ακτίνας R ως προς τον άξονά της,* $I_{\sigma\phi} = \frac{2}{5}MR^2$ *και η ροπή αδρανείας κυλίνδρου μάζας Μ και ακτίνας R ως προς τον άξονά του,* $I_{\kappa\upsilon\lambda} = \frac{1}{2}MR^2$ **).** Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

α) Ο κύλινδρος θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των δύο αντικειμένων.

β) Το σώμα με τη μεγαλύτερη μάζα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο.

γ) Θα διανύσουν την απόσταση και τα δύο συγχρόνως, ανεξάρτητα από τη μάζα και την ακτίνα των δύο αντικειμένων.

δ) Η σφαίρα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των δύο αντικειμένων.

Β. Μία μάζα κρέμεται από ένα κατακόρυφο ελατήριο και μετατοπίζεται, κατά την κατακόρυφη προς τα κάτω, κατά μία απόσταση y από το σημείο ισορροπίας του. Αφού αφεθεί ελεύθερο, εκτελεί μία αρμονική περιοδική κίνηση με περίοδο T. Μετά από χρόνο $\frac{5T}{4}$ η ταχύτητα της μάζας είναι (Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας):

α) Μέγιστη και κινείται προς τα πάνω.
β) Σταθερή.
γ) Μέγιστη και κινείται προς τα κάτω.
δ) Μηδέν.

<u>Λύση</u>

Α. Εάν η μετατόπιση στον κατακόρυφο άξονα είναι Δh, τότε ισχύει

$$\left.\begin{aligned} mg\Delta h &= \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ \upsilon &= \omega R \\ I &= KmR^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta h = \frac{g\,\upsilon^2}{2}(K+1) \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2\Delta h\, g}{K+1}$$

όπου $\left.\begin{aligned} K_{\sigma\phi} &= \frac{2}{5} \\ K_{\kappa\upsilon\lambda} &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad K_{\kappa\upsilon\lambda} > K_{\sigma\phi}$

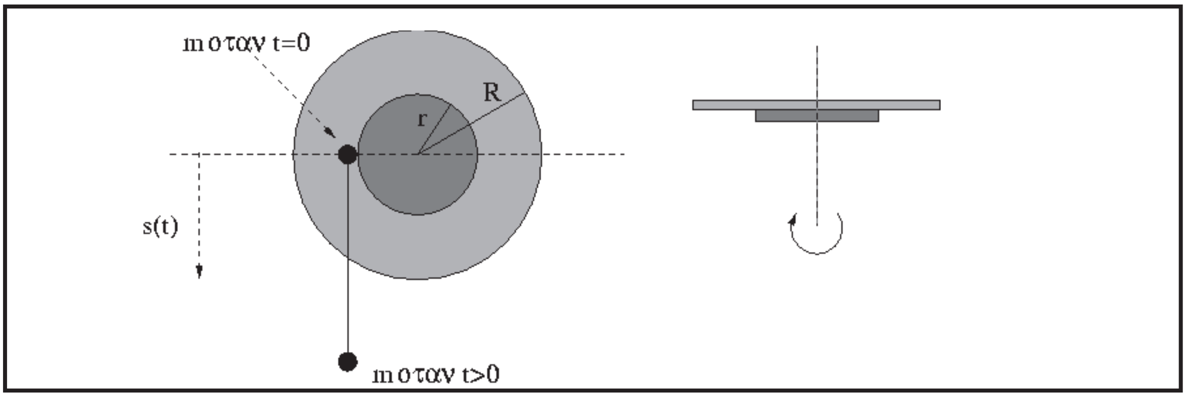
Άρα $\upsilon_{\kappa\upsilon\lambda} < \upsilon_{\sigma\phi}$

Σωστή απάντηση η (δ) η σφαίρα θα διανύσει την απόσταση σε λιγότερο χρόνο και αυτό είναι ανεξάρτητο της μάζας και της ακτίνας των δύο αντικειμένων

Β. Είναι $\frac{5T}{4} = T + \frac{T}{4}$**.** Άρα η ταχύτητα της μάζας είναι μέγιστη και κινείται προς τα πάνω, σωστή απάντηση η (α)

ΘΕΜΑ 5

Ένας τροχός αποτελείται από δυο ομόκεντρους δίσκους με ακτίνες R = 0,5m και r = 0,3m όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο μικρότερος δίσκος έχει μάζα m_r = 0,2Kg και ο μεγαλύτερος m_R = 10Kg. Γύρω από το μικρότερο δίσκο είναι τυλιγμένο σχοινί μήκους L = 10m αμελητέου βάρους και στην μια άκρη του είναι συνδεδεμένη μια μάζα m= 0,1Kg. Τη χρονική στιγμή t = 0 η μάζα m αφήνεται ελεύθερη και πέφτει ξετιλύγωντας το σχοινί. **(α)** Ποια είναι η τάση που αναπτύσσεται στο σχοινί ενώ ξετυλίγεται. **(β)** Υπολογίστε την γωνιακή επιτάχυνση α(t), την γωνιακή ταχύτητα ω(t) των δίσκων και τη θέση s(t) της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου t. **(γ)** Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί όλο το σχοινί.



Λύση
(α) Το σώμα κινείται προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του mg, ενώ στο σχοινί αναπτύσσεται μία τάση προς τα πάνω. Το σύστημα των δύο τροχών έχει ροπή αδρανείας I :

$$I = \frac{1}{2}m_r r^2 + \frac{1}{2}m_R R^2 = 1.259\, kg\ m^2 \qquad (1)$$

Η ροπή του συστήματος είναι:

$$Tr = I\frac{d\omega}{dt} = I\, a(t) \qquad (2)$$

Η ταχύτητα μετατόπισης και η επιτάχυνση της μάζας m είναι:

$$\frac{ds}{dt} = \omega r \qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = a(t)\, r \qquad (3)$$

αντίστοιχα. Επίσης απότο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = mg - T \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = g - \frac{T}{m} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) έχουμε;

$$g - \frac{T}{m} = \frac{T}{I}r^2 \Rightarrow T = \frac{mg}{1+\frac{mr^2}{I}} = 0.992N$$

(β) Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε;

$$a(t) = \frac{d\omega}{dt} = \frac{Tr}{I} = 0.236 s^{-2}$$

ολοκληρώνοντας

$$\Rightarrow \omega(t) = 0.236\, t\ s^{-1} \qquad (5)$$

Από την (3) έχουμε:

$$\frac{ds}{dt}(0.236t)\,0.3 = 0.0708\, t$$

και ολοκληρώνοντας

$$s(t) = \frac{0.0708}{2}t^2 = 0.0354 t^2 \qquad (6)$$

(γ) από την (6) για το συνολικό μήκος του σχοινιού βρίσκουμε τον συνολικό χρόνο που θα χρειαστεί για να ξετυλιχτεί

$$t_{o\lambda} = \sqrt{\frac{10}{0.0354}} = 16.807 s$$

και αντικαθιστώνατς στην (5) βρίσκουμε την γωνιακη ταχύτητα: $\omega(t_{o\lambda}) = 3.966\, s^{-1}$