3η Εργασία
Ημερομηνία Αποστολής: 1/3/2010

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας σώματος μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση y από την επιφάνεια της Γης, είναι

$$U \approx -m\, g\, R_e + m\, g\, y$$

όπου $g = G\, M / (R_e)^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας και R_e η ακτίνα της Γης, εφ' όσον $y/ R_e \ll 1$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση ανάπτυξης σε σειρά, κρατώντας μόνο το πρώτο όρο της σειράς και για n = -1.

$$a^n\left(1+\frac{bx}{a}\right)^n = a^n\left[1+n\left(\frac{bx}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{bx}{a}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{bx}{a}\right)^3 \ldots\right]$$

Λύση

Η δυναμική ενέργεια της βαρύτητας για σώμα μάζας m σε απόσταση r από το κέντρο της Γης ($r > R_e$), δίνεται από τη σχέση

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$

όπου M η μάζα της Γης. Αυτή για το συγκεκριμένο πρόβλημα γράφεται:

$$U(r) = -\frac{GmM}{R_e + y}$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με R_e, παίρνουμε

$$U(r) = -\frac{GmM}{R_e}\frac{1}{\left(1 + y/R_e\right)}$$

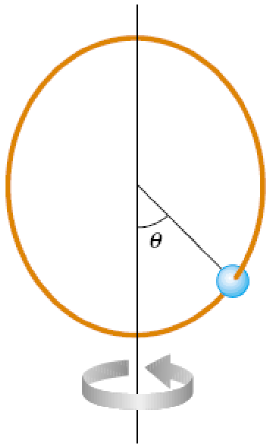
Χρησιμοποιώντας τη σχέση ανάπτυξης σε σειρά της υπόδειξης για n = -1, προκύπτει:

$$U(r) = -\frac{GmM}{R_e}\left(1-\frac{y}{R_e}+\frac{y^2}{R_e^2}-\ldots\right)$$

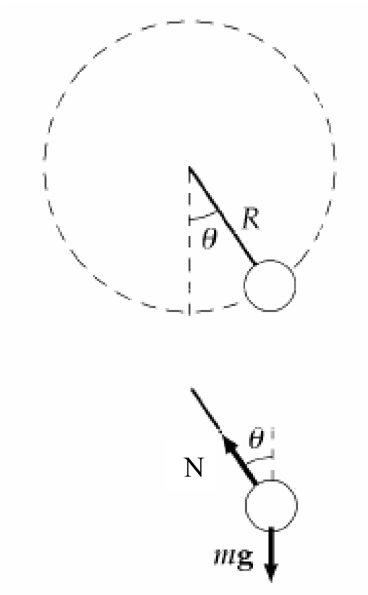
Αφού $y/ R_e \ll 1$ ο τρίτος όρος μέσα στην παρένθεση μπορεί να αγνοηθεί, οπότε με πράξεις εύκολα προκύπτει η προς απόδειξη σχέση.

Άσκηση 2

Μια χάντρα μπορεί να γλιστρήσει με αμελητέα τριβή σε ένα σύρμα που κάμπτεται σε κυκλικό βρόχο ακτίνας 15,0 cm, όπως στο σχήμα. Ο κύκλος είναι πάντα σε ένα κατακόρυφο επίπεδο και περιστρέφεται σταθερά γύρω από την κάθετη διάμετρό του με (α) περίοδο 0,450 s. Η θέση της χάντρας περιγράφεται από τη γωνία, την οποία σχηματίζει με την κατακόρυφο η ακτίνα, από το κέντρο του βρόχου προς τη χάντρα. Σε ποια γωνία επάνω από το κατώτατο σημείο του κύκλου μπορεί η χάντρα να παραμείνει ακίνητη σε σχέση με τον περιστρεφόμενο κύκλο; (β) Επαναλάβετε το πρόβλημα εάν η περίοδος του περιστρεφόμενου κύκλου είναι 0,850 s.



Λύση



(α) Η χάντρα περιστρέφεται σε κύκλο ακτίνας $r = R\sin\theta$ με ταχύτητα

$$\upsilon = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R\sin\theta}{T}$$

Η κάθετη δύναμη έχει μια

προς τα μέσα ακτινική συνιστώσα *Nsinθ*

προς τα πάνω συνιστώσα *Ncosθ*

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad N\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

Οπότε

$$\sum F_x = N\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta = \frac{m}{R\sin\theta}\left(\frac{2\pi R\sin\theta}{T}\right)^2$$

που τελικά δίνει

$$\frac{g\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4\pi^2 R\sin\theta}{T^2}$$

και έχει δύο λύσεις:

$$\sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$$

και

$$\cos\theta = \frac{gT^2}{4\pi^2 R}$$

Αν R = 15.0cm και T = 0.450s, η δεύτερη λύση δίνει

$$\cos\theta = \frac{(9.80m/s^2)(0.450s)^2}{4\pi^2(0.150m)} = 0.335 \quad \Rightarrow \quad \theta = 70.4^o$$

Έτσι, σε αυτή την περίπτωση η χάντρα παραμένει ακίνητη στο σύρμα στις δύο θέσεις $\theta = 70^o$ και $\theta = 0^o$

(β) Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\cos\theta = \frac{(9.80m/s^2)(0.850s)^2}{4\pi^2(0.150m)} = 1.20$$ που είναι **αδύνατη** *(αφού cosθ>1)*

Σε αυτή την περίπτωση, η χάντρα παραμένει στο κατώτατο σημείο του συρμάτινου κυκλικού βρόχου, $\theta = 0^o$. Η περιστροφή του βρόχου πρέπει να είναι ταχύτερη από κάποια ορισμένη τιμή κατωφλίου προκειμένου η χάντρα να κινηθεί απομακρυνόμενη από την κατώτατη θέση.

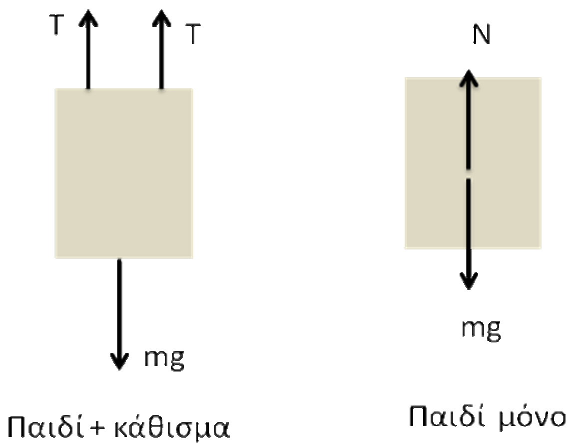
Άσκηση 3

Ένα παιδί μάζας *m* ταλαντώνεται σε μια κούνια που υποστηρίζεται από δύο αλυσίδες, κάθε μία μήκους R. Εάν η τάση κάθε αλυσίδας στο χαμηλότερο σημείο είναι T, βρείτε (α) την ταχύτητα του παιδιού στο χαμηλότερο σημείο και (β) τη δύναμη που ασκείται από το κάθισμα στο παιδί στο χαμηλότερο σημείο. (Αγνοείστε τη μάζα του καθίσματος.)

Εφαρμογή: m = 40 Kg, R=3m, T=350N. Θεωρείστε g = 9.8 m/s^2

Λύση:

(α) Όταν η κούνια είναι στο χαμηλότερο σημείο, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα «παιδί – κάθισμα» δρουν μόνο κατά τον άξονα y και είναι:



$$\sum F_y = (m+m_\kappa)a_y \quad \Rightarrow \quad 2T-(m+0)g = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = R\left(\frac{2T}{m}-g\right) \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{R\left(\frac{2T}{m}-g\right)} \qquad (1)$$

όπου m_k η μάζας του καθίσματος, η οποία σύμφωνα με την εκφώνηση είναι μηδενική.

(β) Οι δυνάμεις που δρουν στο παιδί μόνο είναι:

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad N-mg = m\frac{\upsilon^2}{R}$$

Αλλά από τα προηγούμενα $\upsilon^2 = R\left(\frac{2T}{m}-g\right)$

Οπότε: $N = m\left(g+\frac{2T}{m}-g\right) = 2T \qquad (2)$

Εφαρμογή:

Από την (1) με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει αναλυτικά

$$\upsilon=\sqrt{3m\left(\frac{2\cdot 350N}{40Kg}-9.8m/s\right)}=\sqrt{3(17.5\frac{mN}{kg}-9.8\frac{m^2}{s^2})}=$$

$$=\sqrt{52.5\frac{mKg\frac{m}{s^2}}{kg}-29.4\frac{m^2}{s^2}}=\sqrt{23.1\frac{m^2}{s^2}}=4.81\frac{m}{s}$$

Από τη (2) προκύπτει

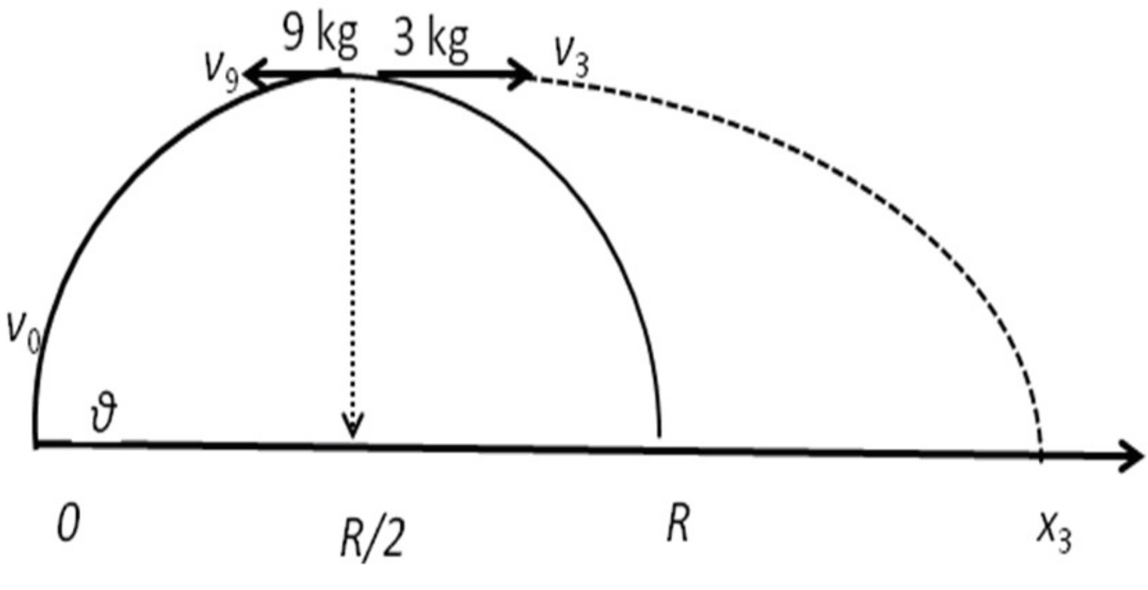
$$N=m\left(g+\frac{2T}{m}-g\right)=2T=2\cdot 350N=700N\ .$$

Άσκηση 4

Ένα βλήμα μάζας 12 kg εκτοξεύεται υπό γωνία 55^o πάνω από την οριζόντια διεύθυνση με αρχική ταχύτητα 150 m/s. Όταν βρίσκεται στο μέγιστο ύψος της τροχιάς του, το βλήμα εκρήγνηται και σπάει σε 2 κομμάτια, το ένα με μάζα τριπλάσια της μάζας του άλλου. Τα 2 θραύσματα φτάνουν στο έδαφος την ίδια χρονική στιγμή. Το βαρύτερο θραύσμα προσγειώνεται ακριβώς στο σημείο εκτόξευσης. Που θα προσγειωθεί το άλλο θραύσμα και πόση ενέργεια εκλύθηκε κατά την έκρηξη; Υποθέστε ότι το έδαφος είναι οριζόντιο και δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα, ($g=9,8ms^{-2}$).

Λύση

Τα δυο θραύσματα έχουν μάζες 3.00 kg και 9.00 kg. Γνωρίζουμε ότι ο χρόνος ανόδου στο μέγιστο σημείο της τροχιάς είναι ίδιος ακριβώς με τον χρόνο καθόδου ως το έδαφος.



Για να βρούμε τον χρόνο ανόδου εξετάζουμε την κίνηση κατά την κατακόρυφο y διεύθυνση λαμβάνοντας υπόψη ότι στο μέγιστο σημείο της τροχιάς η y συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται, άρα.

$$v_y = v_{0y} \sin\theta - gt$$
$$0 = (150\ \mathrm{m/s}) \sin 55.0^{o} - 9.8\ \mathrm{m/s^2}\, t_a$$
$$t_a = 12.5\ \mathrm{s}.$$

Εάν το βλήμα συνέχιζε την πορεία του θα έφτανε στο έδαφος σε απόσταση ίση με το βεληνεκές, R, δηλαδή

$$R = 2\,\mathrm{t}_\alpha\, \mathrm{v}_0 \cos 55^o = 2\cdot 12,5s\cdot 150m/s\cdot 0,57 = 2150,9m\,.$$

Μετά τη έκρηξη το σύστημα των δύο θραυσμάτων θα συμπεριφέρεται έτσι ώστε το κέντρο μάζας του να συμπίπτει, κάθε χρονική στιγμή, με τη θέση του βλήματος εάν δεν εκρήγνυτο. Συνεπώς τη στιγμή της πρόσκρουσης το βλήμα θα βρίσκονταν στη θέση $x=R$ ενώ το ένα θραύσμα στη θέση $x=0$ και το άλλο στη θέση x_3. Για να είναι το κέντρο μάζας τους στη θέση R, από τον ορισμό του κέντρου μάζας θα έχουμε:

$$R = \frac{x_9 m_9 + x_3 m_3}{m_9 + m_3} \Rightarrow R\left(m_9 + m_3\right) = x_9 m_9 + x_3 m_3 \Rightarrow x_3 = \frac{R\left(m_9 + m_3\right) - x_9 m_9}{m_3} \Rightarrow$$
$$\frac{2150,9m\cdot 12kg - 0m\cdot 9kg}{3kg} = \frac{2150,9m\cdot 12kg}{3kg} = 8603,6m.$$

Άλλος τρόπος: Το βαρύτερο θραύσμα ταξιδεύει πίσω προς το σημείο εκτόξευσης, για να συμβεί αυτό πρέπει στο σημείο της έκρηξης να έχει ακριβώς την αντίθετη ταχύτητα.
$v_x = v_0 \cos\theta = (150\,\mathrm{m/s}) \cos 55^o = 86.0\ \mathrm{m/s}$ προς τα αριστερά (πίσω), αυτή συμβολίζεται με v_9.
Βρίσκουμε τώρα και την v_3 χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ορμής κατά τη στιγμή της έκρηξης.

$$Mv_0 \cos\theta = m_3 v_3 + m_9 v_9$$
$$\left(12\ \mathrm{kg}\right)\left(86,0\,\mathrm{m/s}\right) = \left(3\ \mathrm{kg}\right) v_3 + \left(9\mathrm{kg}\right)\left(-86,0\,\mathrm{m/s}\right)$$
$$v_3 = 602,3\,\mathrm{m/s}$$

Από αυτό το σημείο η κίνηση του θα διαρκέσει χρόνο t_α έως ότου συγκρουστεί με το έδαφος. Συνεπώς η συνολική απόσταση που θα διανύσει είναι:

$$x_3 = R/2 + \mathrm{v}_3 t_\alpha = (86,0\ \mathrm{m/s})(12,5\ \mathrm{s}) + (602,3\,\mathrm{m/s})(12,5) = 8603,7m$$

$x_3 = 8603,7\mathrm{m}$ από το σημείο εκτόξευσης.

Ενέργεια που ελευθερώθηκε = Κ. Ενέργεια μετά την έκρηξη – Κ. Ενέργεια πριν την έκρηξη

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\mathrm{m}_3 v_3^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}_9 v_9^2 - \frac{1}{2}(m_3 + m_9)v_9^2 \\
&= \frac{1}{2}(3\ \mathrm{kg})(602{,}3\ \mathrm{m/s})^2 + \frac{1}{2}(9\ \mathrm{kg})(86{,}0\ \mathrm{m/s})^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}(12\ \mathrm{kg})(86{,}0\ \mathrm{m/s})^2 \\
&= 5{,}33 \times 10^5\ \mathrm{J}
\end{aligned}
$$

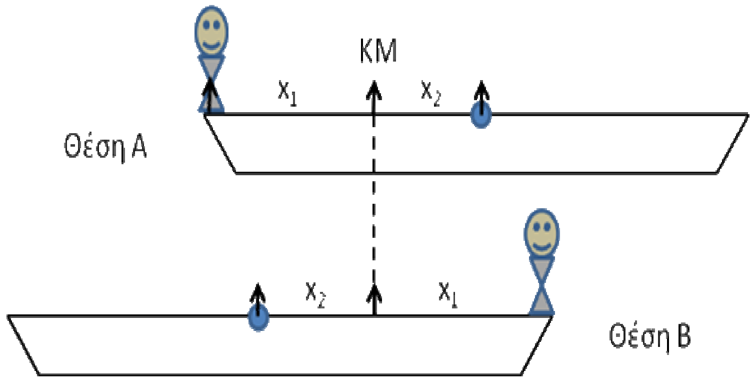
Άσκηση 5

α. Ένα παιδί που έχει μάζα 45kg στέκεται στο ένα άκρο μιας βάρκας μήκους 3m η οποία έχει μάζα 60 kg. Το παιδί και η βάρκα είναι ακίνητα και κάποια χρονική στιγμή το παιδί αρχίζει να βαδίζει αργά έως ότου φτάσει στο άλλο άκρο της βάρκας. Κατά πόση απόσταση μετατοπίζεται η βάρκα κατά την κίνηση αυτή του παιδιού αν υποθέσουμε ότι η βάρκα κινείται στο νερό χωρίς αντίσταση;

β. Ένα βιβλίο βρίσκεται πάνω σε τραπέζι του οποίου η επιφάνεια δεν είναι εντελώς λεία. Θέλουμε το βιβλίο να παραμείνει ακίνητο ως προς το τραπέζι όταν αυτό περιστρέφεται με 20 στροφές/min. Το βιβλίο βρίσκεται σε απόσταση 1.5m από τον άξονα περιστροφής που υποτίθεται κατακόρυφος. Πόσος πρέπει να είναι ο συντελεστής τριβής; Να σημειωθούν οι δυνάμεις που δρουν στο βιβλίο και να γίνει ο υπολογισμός (i) για αδρανειακό παρατηρητή και (ii) για περιστρεφόμενο παρατηρητή.

Λύση

α.

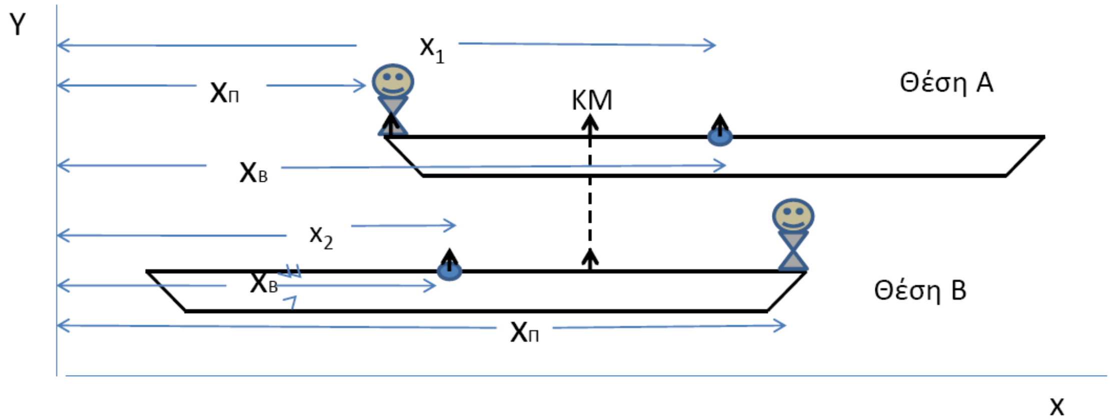


Το παιδί και η βάρκα βρίσκονται αρχικά στη θέση Α. Το κέντρο μάζας, ΚΜ βρίσκεται στο σημείο που υποδεικνύεται στο σχήμα. Το σύστημα είναι απομονωμένο, αφού δεν υπάρχει αντίσταση στην κίνηση της βάρκας, άρα δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη στο σύστημα και συνεπώς το κέντρο μάζας θα παραμείνει ακίνητο κατά την μετάβαση από την θέση Α στην θέση Β.

Επιλέγουμε λοιπόν ως αρχή του άξονα της κίνησης το ΚΜ. Στη θέση Α έχουμε:

$\frac{m_\pi x_1 - m_\beta x_2}{m_\pi + m_\beta} = 0 \Rightarrow m_\pi x_1 = m_\beta x_2$ και $x_1 + x_2 = l/2$ όπου m_π, m_β είναι οι μάζες του παιδιού και της βάρκας ενώ το $l/2$ είναι 1,5 m. Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει $x_1 = 0,857m$ και $x_2 = 0,643m$. Στη θέση Β το ΚΜ του συστήματος παραμένει ακίνητο οπότε το σύστημα έχει λάβει την θέση που φαίνεται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι το κέντρο βάρους της βάρκας βρίσκεται τώρα κατά απόσταση x_2 αλλά προς την αρνητικά του άξονα της κίνησης. Το κέντρο βάρους έχει μετατοπιστεί λοιπόν κατά $2 \cdot x_2 = 1,286m$.

Εναλλακτική λύση:



Το παιδί και η βάρκα βρίσκονται αρχικά στη θέση Α. Το κέντρο μάζας, ΚΜ βρίσκεται στο σημείο που υποδεικνύεται στο σχήμα. Το σύστημα είναι απομονωμένο, αφού δεν υπάρχει αντίσταση στην κίνηση της βάρκας, άρα δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη στο σύστημα και συνεπώς το κέντρο μάζας θα παραμείνει ακίνητο κατά την μετάβαση από την θέση Α στην θέση Β.

Θέση Α:

$$x_{KM} = \frac{m_\Pi x_\Pi + m_B x_B}{m_\Pi + m_B} = \frac{m_\Pi (x_1 - \frac{l}{2}) + m_B x_1}{m_\Pi + m_B} \qquad (1)$$

Θέση Β:

$$x_{KM} = \frac{m_\Pi x_A + m_B x_B}{m_\Pi + m_B} = \frac{m_\Pi (x_2 + \frac{l}{2}) + m_B x_2}{m_\Pi + m_B} \qquad (2)$$

Η μετακίνηση της βάρκας προς τα αριστερά είναι: $x = x_1 - x_2$ (3)

Εξισώνοντας τις (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη την (3) προκύπτει:

$$m_{\Pi}(x_1 - \frac{l}{2}) + m_B x_1 = m_{\Pi}(x_2 + \frac{l}{2}) + m_B x_2 \Rightarrow$$

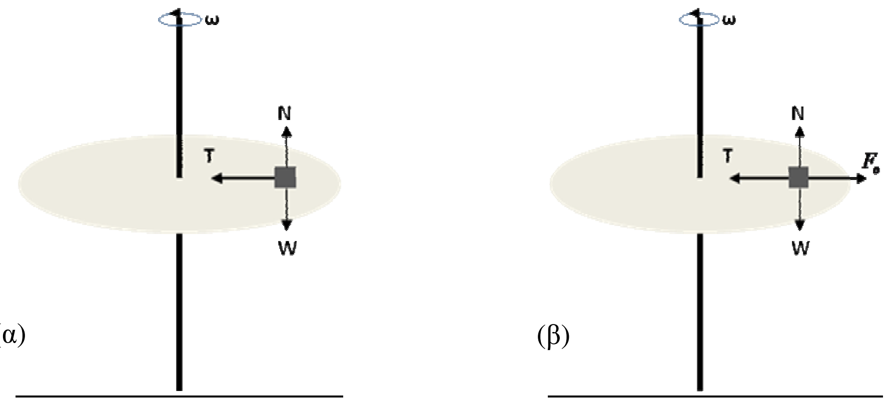
$$m_{\Pi} x_1 - m_A \frac{l}{2} + m_B x_1 = m_{\Pi} x_2 + m_{\Pi} \frac{l}{2} + m_B x_2 \Rightarrow$$

$$m_{\Pi}(x_1 - x_2) + m_B(x_1 - x_2) = m_{\Pi}(\frac{l}{2} + \frac{l}{2}) = m_{\Pi} l \quad (\mu\acute{\varepsilon}\sigma\omega\ \tau\eta\varsigma\ (3)) \Rightarrow$$

$$m_{\Pi} x + m_B x = m_{\Pi} l \quad \Rightarrow \quad x(m_{\Pi} + m_B) = m_{\Pi} l \Rightarrow$$

$$x = \frac{m_{\Pi}}{m_{\Pi} + m_B} l = \frac{45Kg}{105Kg} 3m = \frac{135}{105} m = 1.286m$$

β.



(i) <u>Αδρανειακός Παρατηρητής</u>: Ίδε σχήμα (α)

Το βιβλίο κάνει κυκλική κίνηση οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι κεντρομόλος. Στο σώμα δρουν: Το βάρος W = mg και η κάθετη δύναμη N από το τραπέζι. Άρα, για να παραμένει ακίνητο το σώμα κατά την περιστροφή του τραπεζιού πρέπει να υπάρχει και τριβή, T, η οποία θα παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης. Οπότε

$$\sum F_y = 0: \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_x = ma_r: \quad \Rightarrow \quad T = m\frac{\upsilon^2}{r} \quad \Rightarrow \quad T = m\omega^2 r \qquad (2)$$

Αλλά $T \le T_{o\rho} = \mu_s N \overset{(1)}{=} \mu_s mg$ οπότε η (2) γράφεται

$$m\omega^2 r \le \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \frac{\omega^2 r}{g} = ... = 0.67$$

(ii) <u>Μη αδρανειακός Παρατηρητής</u>: Ίδε σχήμα (β)

Ως προς αυτόν τον παρατηρητή το βιβλίο ηρεμεί οπότε στο σώμα δρουν: Το βάρος W = mg και η κάθετη δύναμη N από το τραπέζι, η τριβή T και η μη αδρανειακή δύναμη (φυγόκεντρος δύναμη) $F_o = -m\omega^2 r$

Οπότε:

$$\sum F_y = 0: \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0 \qquad (3)$$
$$\sum F_x = 0: \quad \Rightarrow \quad T - F_o = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_o = m\omega^2 r \qquad (4)$$

Όμως $T \le T_{o\rho} = \mu_s N \overset{(1)}{=} \mu_s mg$ οπότε

$$m\omega^2 r \le \mu_s mg \quad \Rightarrow \quad \mu_s \ge \frac{\omega^2 r}{g} = ... = 0.67$$

δηλ. αποτέλεσμα όμοιο με το προηγούμενο.

<u>Άσκηση 6</u>

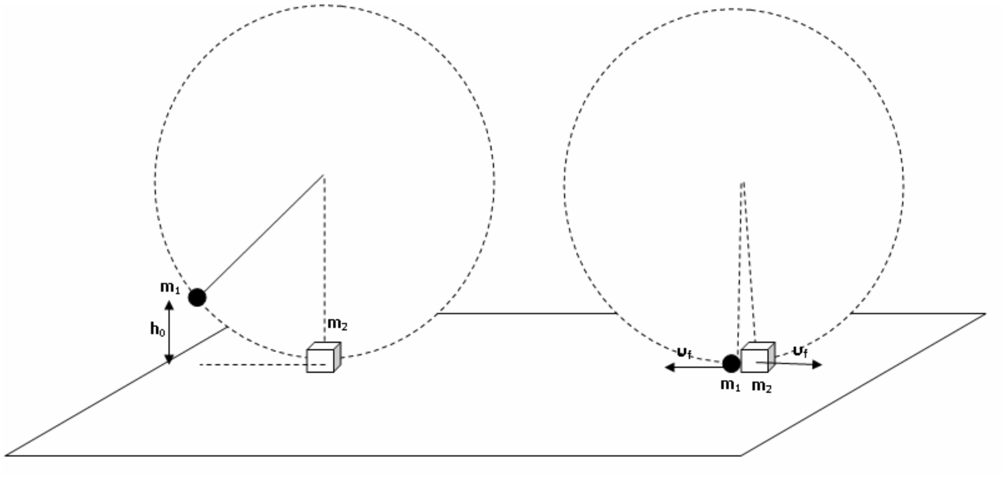
Απλό εκκρεμές αποτελείται από ένα βαρίδι μάζας m_1 που κρέμεται από ένα σκοινί αμελητέας μάζας. Το βαρίδι ανυψούται σε ύψος h_0 (σε σχέση με θέση ισορροπίας) και αφήνεται ελεύθερο να εκτελέσει κυκλική κίνηση. Στην κατώτερη θέση της τροχιάς συγκρούεται με ακίνητη μάζα m_2 σε τραπέζι χωρίς τριβή.

α. Βρείτε την ταχύτητα του βαριδιού στην κατώτερη θέση της τροχιάς υ_0, ακριβώς πριν συγκρουστεί.

β. Υποθέστε ότι η σύγκρουση είναι ελαστική και ότι το βαρίδι μετά την σύγκρουση κινείται στην αντίθετη κατεύθυνση με ταχύτητα ίδια (όσον αφορά το μέτρο) με της μάζας m_2. Βρείτε την μάζα m_2.

γ. Υποθέστε ότι η σύγκρουση είναι πλαστική και ότι το βαρίδι κολλάει πάνω στην μάζα και το συσσωμάτωμα βαρίδι-μάζα συνεχίζει την κυκλική τροχιά. Ποια είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την σύγκρουση;

δ. Σε ποιο ύψος h_{max} θα ανέλθει το συσσωμάτωμα μετά την σύγκρουση;



Λύση

α. Η ταχύτητα του βαριδιού βρίσκεται εύκολα από την διατήρηση της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = m_1 g h_0 \Rightarrow \upsilon_0^2 = 2gh_0 \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{2gh_0}$$

β. Από την διατήρηση της ορμής αλλά και της κινητικής ενέργειας έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους, υ_f και m_2:

$$m_1\upsilon_0 = m_2\upsilon_f - m_1\upsilon_f = (m_2 - m_1)\upsilon_f \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_f^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_f^2 \Rightarrow m_1\upsilon_0^2 = m_1\upsilon_f^2 + m_2\upsilon_f^2 = (m_1 + m_2)\upsilon_f^2 \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (2) έχουμε:

$$m_1\upsilon_0^2 = \frac{(m_1+m_2)}{(m_2-m_1)^2}m_1^2\upsilon_0^2 \Rightarrow 1 = \frac{(m_1+m_2)}{(m_2-m_1)^2}m_1 \Rightarrow m_2(m_2 - 3m_1) = 0 \qquad (3)$$

Η μη τετριμμένη λύση είναι

$m_2 = 3m_1$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) την τιμή της m_2 βρίσκουμε την ταχύτητα υ_f:

$$\upsilon_f = \frac{\upsilon_0}{2}$$

γ. Στην πλαστική κρούση έχουμε:

$$m_1\upsilon_0 = (m_1 + m_2)\upsilon_f^{'} \qquad (4)$$

$$m_1\upsilon_0 = (m_1 + m_2)\upsilon_f^{'} \Rightarrow \upsilon_f^{'} = \frac{m_1\upsilon_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\upsilon_0}{m_1 + 3m_1} = \frac{\upsilon_0}{4} \qquad (5)$$

Η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι μισή από την περίπτωση της ελαστικής κρούσης του προηγούμενου ερωτήματος.

δ. Από την διατήρηση της ενέργειας μετά την συσσωμάτωση έχουμε:

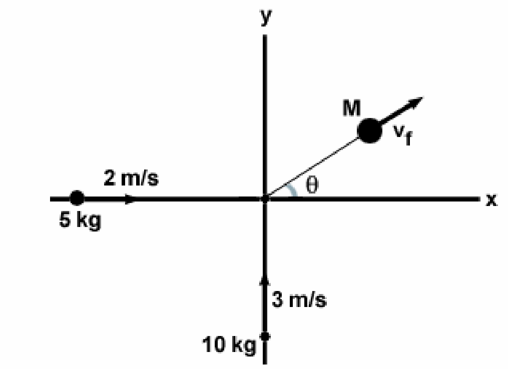
$$(m_1 + m_2)gh_{\max} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_f^{'2} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{\upsilon_0}{4}\right)^2 \qquad (6)$$

Λύνοντας την εξίσωση (6) ως προς h_{max} έχουμε τελικά:

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{32g} = \frac{1}{16}h_0$$

<u>Άσκηση 7</u>

Δύο σφαίρες με μάζες 5 και 10 Kg, και ταχύτητες 2 και 3 m/s, αντίστοιχα, κινούνται κατά μήκος των αξόνων x και y (ίδε σχήμα) και στην αρχή των αξόνων (0,0) συγκρούονται και συσσωματώνονται. Βρείτε το μέτρο και την διεύθυνση της ταχύτητας μετά την σύγκρουση.



<u>Λύση</u>

Η σύγκρουση είναι προφανώς ανελαστική. Οι δύο άγνωστες παράμετροι είναι η τελική ταχύτητα και η γωνία θ. Υπάρχουν όμως δύο εξισώσεις διατήρησης της ορμής στους άξονες x και y και συμβολίζοντας με m_1=5 Kg και m_2=10 Kg ($m_1 + m_2 = M$), v_f = τελική ταχύτητα, v_1=2 m/s και v_2=3 m/s έχουμε:

x: $m_1v_1=(m_1+m_2)v_f\cos\theta$ (1)

y: $m_2v_2=(m_1+m_2)v_f\sin\theta$ (2)

από τις οποίες προκύπτει:

$$v_f \cos\theta = \frac{m_1 v_1}{(m_1+m_2)} = \frac{5(Kg)\cdot 2(m/s)}{(5+10)Kg} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}(m/s) \qquad (3)$$

$$v_f \sin\theta = \frac{m_2 v_2}{(m_1+m_2)} = \frac{10(Kg)\cdot 3(m/s)}{(5+10)Kg} = \frac{30}{15} = 2(m/s) \qquad (4)$$

Διαιρώντας την (4) με την (3) έχουμε:

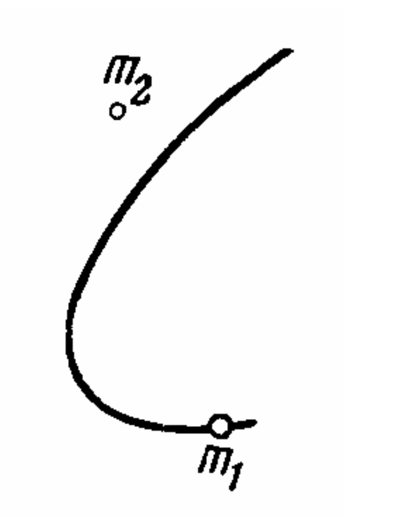
$$\frac{v_f \sin\theta}{v_f \cos\theta} = \frac{2}{(2/3)} = 3 \Rightarrow \tan\theta = 3 \Rightarrow \theta = 71{,}6^o$$

Αντικαθιστώντας στην (3) ή στην (4) την τιμή του sinθ ή cosθ με την γνωστή πλέον τιμή του βρίσκουμε την τελική ταχύτητα v_f:

$v_f = 2{,}11$m/s, με γωνία θ = $71{,}6^o$ ως προς τον άξονα x.

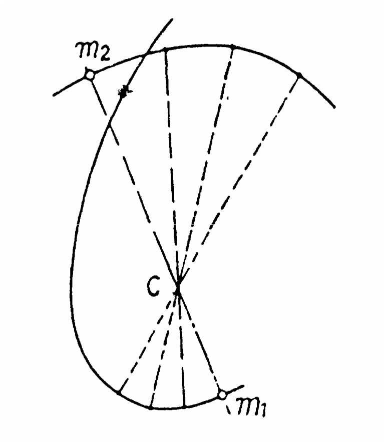
Άσκηση 8

Δυο αλληλεπιδρώντα σωματίδια σχηματίζουν ένα απομονωμένο σύστημα του οποίου το κέντρο μάζας είναι ακίνητο (σε ηρεμία). Το επόμενο σχήμα δείχνει τις θέσεις των δυο σωματιδίων κάποια ορισμένη χρονική στιγμή, καθώς και την τροχιά του σωματιδίου 1 μάζας m_1. Να σχεδιάσετε την τροχιά του σωματιδίου 2 μάζας m_2 εάν $m_2 = \frac{m_1}{2}$.



Λύση

Καθώς το απομονωμένο σύστημα των 2 σωματιδίων είναι αρχικά σε ηρεμία το Κέντρο Μάζας (ΚΜ) του συστήματος θα παραμένει σε ηρεμία. Επιπλέον καθώς $m_2 = \frac{m_1}{2}$ η θέση του ΚΜ θα βρίσκεται προφανώς επί της ευθείας που ενώνει τα δυο σωματίδια και στο σημείο C όπου η αποστάσεις x_1 και x_2 έχουν την σταθερή σχέση $x_1 m_1 = x_2 m_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = 2x_1$.
Επιπροσθέτως η ολική ορμή του συστήματος στο σύστημα του ΚΜ είναι κάθε στιγμή μηδέν, άρα $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \Rightarrow m_1\vec{\upsilon}_1 = -m_2\vec{\upsilon}_2$ και επομένως οι ταχύτητες των δυο σωματιδίων κατευθύνονται σε αντίθετες διευθύνσεις. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη η ζητούμενη τροχιά είναι η σχεδιασμένη στο σχήμα.



Άσκηση 9

Σε ένα σύστημα αναφοράς K δυο σωματίδια ταξιδεύουν κατά μήκος του άξονα x και έχουν μάζες m_1 και m_2 και ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$, αντίστοιχα. Να βρείτε :

(a) Την ταχύτητα $\vec{V}$ του συστήματος αναφοράς K' στο οποίο η συνολική κινητική ενέργεια αυτού του συστήματος είναι ελάχιστη.

(b) Τη συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος στο σύστημα αναφοράς K'.

Λύση

(a) Η ολική κινητική ενέργεια στο σύστημα K' είναι: $T' = \frac{1}{2}m_1(\vec{\upsilon}_1 - \vec{V})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{\upsilon}_2 - \vec{V})^2$

Αυτή έχει ελάχιστο ως προς $\vec{V}$, όταν $\frac{\partial T'}{\partial \vec{V}} = 0$, δηλ. $m_1(\vec{\upsilon}_1 - \vec{V}) + m_2(\vec{\upsilon}_2 - \vec{V}) = 0$. Από αυτή προσδιορίζουμε το $\vec{V} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} = \vec{\upsilon}_c$ Από αυτό προκύπτει ότι $\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{r}_c$.

Συνεπώς το σύστημα αυτό είναι το σύστημα του κέντρου μάζας.

(b) Η γραμμική ορμή του σωματιδίου 1 στο σύστημα αναφοράς K' είναι:

$$\vec{p}_1^{'} = m_1(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_c) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2) = \mu(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)$$

Όπου βεβαίως $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ = ανηγμένη μάζα (ανηγμένη = παθητική μετοχή του ρήματος ανάγομαι και «**ανηγμένη μάζα**» σε αντιπαράθεση με την «**πραγματική μάζα**» ή **reduced mass** στην διεθνή ορολογία), παράμετρος με μονάδα μάζας που θα δείτε συχνά σε συστήματα κίνησης, κρούσεων, κ.λ.π., δύο σωμάτων. Για περισσότερες λεπτομέρειες ψάξτε στο Google.

Παρομοίως $\vec{p}_2^{'} = \mu(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)$.

Η κινητική ενέργεια είναι

$$T' = T_1^{'} + T_2^{'} = \frac{\vec{p}_1^{'2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{'2}}{2m_2} = \frac{1}{2}\mu\left|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right|^2$$

Άσκηση 10

Ελατήριο δεν ακολουθεί το νόμο του Hooke. Η δύναμη (σε Newton) που αυτό ασκεί όταν εκτείνεται κατά x (σε m) έχει μέτρο 52,8 x + 38,4 x^2, σε κατεύθυνση αντίθετη από εκείνη της επιμήκυνσης. (α) Υπολογίστε το απαιτούμενο έργο ώστε να εκταθεί το ελατήριο από x = 0,522 m σε x = 1,34 m. (β) Με το ένα άκρο του ελατηρίου σταθερό, ένα σώμα μάζας 2,17 kg προσδένεται στο άλλο άκρο του, ενώ αυτό έχει τεντωθεί κατά 1,34 m. Το σώμα αφήνεται από την ηρεμία. Υπολογίστε την ταχύτητά του τη στιγμή κατά την οποία το ελατήριο έχει επιστρέψει στη θέση x=0,522 m.

Λύση

(α) Το έργο της δύναμης στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} (52,8x + 38,4x^2)dx = \left(52,8\frac{x^2}{2} + 38,4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{52,8}{2}\left(1,34^2 - 0,522^2\right) + \frac{38,4}{3}\left(1,34^3 - 0,522^3\right) = 69,2J$$

(β) Στη θέση x = 1,34 m, το σύστημα ελατήριο – σώμα έχει ταχύτητα μηδέν. Άρα η μηχανική ενέργεια του συστήματος είναι μόνο η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, δεδομένου ότι αυτό είναι εκτεταμένο, η οποία θα είναι ίση με W + U_i, όπου U_i, η όποια δυναμική ενέργεια μπορεί να είχε το ελατήριο στη θέση x = 0,522 m.

Όταν το σύστημα επανέλθει στη θέση $x = 0{,}522$ m, τότε το ελατήριο θα έχει δυναμική ενέργεια ίση με U_i και το σώμα θα έχει κινητική ενέργεια ίση με $(m\, u^2)/2$, όπου u η ζητούμενη ταχύτητα. Επομένως η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελατήριο – σώμα, θα είναι $U_i + (m\, u^2)/2$.

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας έχουμε

$W + U_i = U_i + (m\, u^2)/2$ άρα $u = (2\, W / m)^{1/2}$,

από την οποία με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει

$u = (2 \times 69{,}2 \text{ J} / 2{,}17 \text{ kg})^{1/2} = 7{,}99$ m/s.