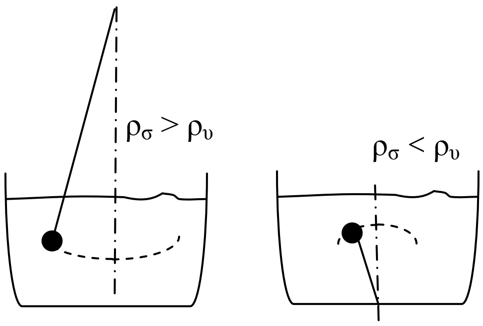
ΦΥΕ-14, 2009-10, Εργασία 5η
Παράδοση 16/5/2010

ΑΣΚΗΣΗ 1

Απλό εκκρεμές μήκους L έχει στο άκρο του σφαιρίδιο πυκνότητας ρ_σ και όγκου V. Όλο το σύστημα βυθίζεται σε μεγάλο δοχείο με υγρό πυκνότητας ρ_υ. Αφήνουμε το σύστημα να κάνει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας θεωρώντας την αντίσταση του υγρού αμελητέα. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g.



1)Να βρεθούν η κυκλική συχνότητα και η περίοδος της κίνησης του σφαιριδίου και να γίνει διερεύνηση της κίνησης για α) $\rho_\sigma > \rho_\upsilon$, β) $\rho_\sigma = \rho_\upsilon$ και γ) $\rho_\sigma < \rho_\upsilon$.

2)Να γίνει το ίδιο αν υπάρχει αντίσταση από το υγρό ίση με -bu, όπου u είναι η ταχύτητα του σφαιριδίου b .

ΛΥΣΗ

1. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο.

α) Αν $\rho_\sigma > \rho_\upsilon$

$$F = -(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)Vg\sin\vartheta \Rightarrow \rho_\sigma V\frac{d^2s}{dt^2} = -(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)Vg\vartheta \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)}{\rho_\sigma}g\vartheta \xrightarrow{s=b\theta} \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)}{\rho_\sigma}\frac{g}{L}\vartheta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)}{\rho_\sigma}\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_\sigma}{(\rho_\sigma - \rho_\upsilon)}\frac{L}{g}}$$

β) Αν $\rho_\sigma = \rho_\upsilon$

$\omega = 0$

$T = \infty$

Και το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση αδιάφορης ισορροπίας

γ) Αν $\rho_\sigma < \rho_\upsilon$

$$F = -(\rho_\upsilon - \rho_\sigma)Vg\sin\vartheta \Rightarrow \rho_\sigma V\frac{d^2s}{dt^2} = -(\rho_\upsilon - \rho_\sigma)Vg\vartheta \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{(\rho_\upsilon - \rho_\sigma)}{\rho_\sigma}g\theta \Rightarrow \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{(\rho_\upsilon - \rho_\sigma)}{\rho_\sigma}\frac{g}{L}\vartheta$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(\rho_\upsilon - \rho_\sigma)}{\rho_\sigma}\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_\sigma}{(\rho_\upsilon - \rho_\sigma)}\frac{L}{g}}$$

2.

α) Αν $\rho_\sigma > \rho_\upsilon$

$$F=-bu-(\rho_\sigma-\rho_\upsilon)Vg\sin\vartheta \Rightarrow \rho_\sigma V\frac{d^2s}{dt^2}=-b\frac{d\theta}{dt}L-(\rho_\sigma-\rho_\upsilon)Vg\vartheta \Rightarrow \rho_\sigma V\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-b\frac{d\theta}{dt}-(\rho_\sigma-\rho_\upsilon)V\frac{g}{L}\vartheta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{(\rho_\sigma-\rho_\upsilon)\frac{g}{L}}{\rho_\sigma}-(\frac{b}{2\rho_\sigma V})^2}$$

$$T=2\pi\frac{1}{\sqrt{\frac{(\rho_\sigma-\rho_\upsilon)\frac{g}{L}}{\rho_\sigma}-(\frac{b}{2\rho_\sigma V})^2}}$$

β) Αν $\rho_\sigma = \rho_\upsilon$
το σώμα βρίσκεται σε κατάσταση αδιάφορης ισορροπίας

γ) Αν $\rho_\sigma < \rho_\upsilon$

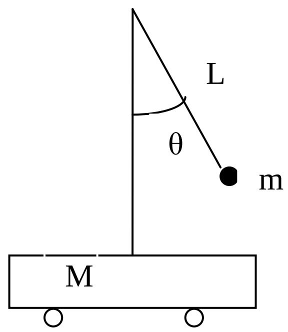
$$F=-bu-(\rho_\upsilon-\rho_\sigma)Vg\sin\vartheta \Rightarrow \rho_\sigma V\frac{d^2s}{dt^2}=-b\frac{d\theta}{dt}L-(\rho_\upsilon-\rho_\sigma)Vg\vartheta \Rightarrow \rho_\sigma V\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-b\frac{d\theta}{dt}-(\rho_\upsilon-\rho_\sigma)\frac{g}{L}\vartheta$$

$$\omega=\sqrt{\frac{(\rho_\upsilon-\rho_\sigma)\frac{g}{L}}{\rho_\sigma}-(\frac{b}{2\rho_\sigma V})^2}$$

$$T=2\pi\frac{1}{\sqrt{\frac{(\rho_\upsilon-\rho_\sigma)\frac{g}{L}}{\rho_\sigma}-(\frac{b}{2\rho_\sigma V})^2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε λεία οριζόντια επιφάνεια βρίσκεται ακίνητο όχημα μάζας M, πάνω στο οποίο είναι τοποθετημένο απλό εκκρεμές μήκους L και μάζας m. Εκτρέπουμε το εκκρεμές κατά μικρή γωνία θ και το αφήνουμε ελεύθερο. Να βρεθούν τα πλάτη της ταλάντωσης του οχήματος και του εκκρεμούς και οι μέγιστες ταχύτητές τους.



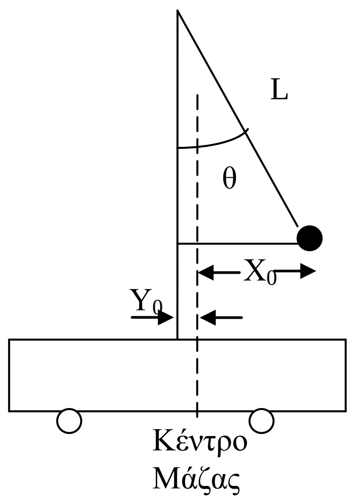
Υπόδειξη: για μικρές γωνίες ισχύει ότι *sinθ=θ* και *cosθ=1-(θ²/2)*

ΛΥΣΗ

Επειδή το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα των σωμάτων είναι μηδέν το κέντρο μάζας δεν κινείται ενώ και το άθροισμα των ορμών των δύο σωμάτων είναι μηδέν σε κάθε στιγμή. Αν X_0 ,Y_0 είναι τα πλάτη της ταλάντωσης του m και M αντίστοιχα και U_m ,U_M είναι οι μέγιστες ταχύτητες τότε θα ισχύουν οι εξισώσεις

$$mX_0=MY_0 \Rightarrow \frac{m}{M}=\frac{Y_0}{X_0}\,(1)$$

$$mU_m=MU_M \Rightarrow \frac{m}{M}=\frac{U_M}{U_m}\,(2)$$



ενώ από το σχήμα φαίνεται ότι

$X_0 + Y_0 = L\sin\theta \Rightarrow X_0 + Y_0 = L\theta(3)$

Λόγω της εκτροπής το απλό εκκρεμές έχει δυναμική ενέργεια που θα είναι ίση με την μέγιστη κινητική των δύο σωμάτων

$$\frac{1}{2}mU_m^2 + \frac{1}{2}MU_M^2 = mgL(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{1}{2}mU_m^2 + \frac{1}{2}MU_M^2 = mgL\frac{\vartheta^2}{2} (4)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 1 και 3 έχουμε ότι

$$X_0 = \frac{M}{M+m}\theta L$$

M

$$Y_0 = \frac{m}{M+m}\theta L$$

ενώ συνδυάζοντας τις βασικές εξισώσεις 1,2,4 θα έχουμε ότι

$$mU_m^2 + MU_M^2 = mgL\theta^2 \Rightarrow U_m^2 + \frac{M}{m}U_M^2 = gL\theta^2 \Rightarrow U_m^2 + \frac{M}{m}\frac{m^2}{M^2}U_m^2 = gL\theta^2 \Rightarrow U_m^2\frac{M+m}{M} = gL\theta^2 \Rightarrow$$

$$U_m^2 = \frac{M}{M+m}gL\theta^2 \Rightarrow U_m = \sqrt{\frac{M}{M+m}gL\theta^2} \Rightarrow U_M = \sqrt{\frac{m^2}{M(M+m)}gL\theta^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

1. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας σε αρμονική ταλάντωση με απόσβεση, συναρτήσει του συντελεστή απόσβεσης b και της ταχύτητας υ.

2. Εκκρεμές μήκους *L* και μάζας *m* αφήνεται από αρχική γωνία 15.0^o . Μετά από 1000s το πλάτος της κίνησης του έχει μειωθεί στις 5.5^o. Αν *b* είναι ο συντελεστής απόσβεσης, να βρεθεί η τιμή του *b/2m.*

3. Σώμα βάρους 0.150kg κρέμεται από ένα αβαρές ελατήριο σταθεράς 6.30N/m . Στο σώμα ασκείται ημιτονοειδής δύναμη πλάτους 1.70N. Για ποια συχνότητα της δύναμης θα έχει η ταλάντωση του σώματος πλάτος 0.440m; (Αγνοείστε τις τριβές).

ΛΥΣΗ

1. Η ολική ενέργεια είναι $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Θεωρούμε την χρονική παράγωγο και έχουμε: $\frac{dE}{dt} = mv\frac{d^2x}{dt^2} + kxv$. Από την εξίσωση (1.64) του τόμου Δ' που διανέμεται έχουμε $\frac{md^2x}{dt^2} = -kx - bv$ και επομένως $\frac{dE}{dt} = v(-kx - bv) + kvx$. Άρα $\frac{dE}{dt} = -bv^2 < 0$

2. Έχουμε $\theta_i = 15.0°$ και $\theta(t = 1\,000) = 5.50°$. Ακόμα $x = Ae^{-bt/2m}$ και επομένως αφού $\frac{x_{1000}}{x_i} = \frac{L\theta_{1000}}{L\theta_i}$ έχουμε

$$\frac{x_{1\,000}}{x_i} = \frac{Ae^{-bt/2m}}{A} = \frac{5.50}{15.0} = e^{-b(1\,000)/2m}$$

$$\ln\left(\frac{5.50}{15.0}\right) = -1.00 = \frac{-b(1\,000)}{2m}$$

$$\therefore \frac{b}{2m} = \boxed{1.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{s}^{-1}}$$

3. Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι της μορφής (b=0):

$$A = \frac{F_{ext}/m}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2}} = \frac{F_{ext}/m}{\pm\left(\omega^2-\omega_0^2\right)} = \pm\frac{F_{ext}/m}{\omega^2-\omega_0^2}.$$

Επομένως

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \frac{F_{ext}/m}{A} = \frac{k}{m} \pm \frac{F_{ext}}{mA} = \frac{6.30\ \mathrm{N/m}}{0.150\ \mathrm{kg}} \pm \frac{1.70\ \mathrm{N}}{(0.150\ \mathrm{kg})(0.440\ \mathrm{m})}$$

με λύσεις $\omega = 8.23\ \mathrm{rad/s}$ ή $\omega = 4.03\ \mathrm{rad/s}$. Οι αντίστοιχες συχνότητες $f = \frac{\omega}{2\pi}$ είναι

$f = \boxed{1.31\ \mathrm{Hz}}$ και $f = \boxed{0.641\ \mathrm{Hz}}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αντικείμενο μάζας 10.6kg ταλαντώνεται στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου με σταθερά $2.05 \times 10^4 N/m$. Ο συντελεστής απόσβεσης λόγω τριβής του αέρα είναι $b = 3.00 N \cdot s/m$.
α. Βρείτε την συχνότητα της ταλάντωσης.
β. Κατά ποιο ποσοστό μειώνεται το πλάτος της ταλάντωσης σε κάθε περίοδο;
γ. Βρείτε τον χρόνο που χρειάζεται για να μειωθεί η ενέργεια στο 5% της αρχικής τιμής της.

ΛΥΣΗ
Η συχνότητα χωρίς απόσβεση θα ήταν

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2.05\times10^4\ \mathrm{N/m}}{10.6\ \mathrm{kg}}} = 44.0/\mathrm{s}$$

και *f = ω/2π = 44/2π = 7.00 Hz*

α. Με απόσβεση:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\left(44\ \frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(\frac{3\ \mathrm{kg}}{\mathrm{s}\ 2\ 10.6\ \mathrm{kg}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1\,933.96 - 0.02} = 44.0\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{44.0}{2\pi\,\mathrm{s}} = \boxed{7.00\ \mathrm{Hz}}$$

β. Σε μια περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$ το πλάτος μεταβάλλεται από A_0 σε $A_0 e^{-b2\pi/2m\omega}$ και η ποσοστιαία μείωση είναι

$$\frac{A_0 - A_0 e^{-\pi b/m\omega}}{A_0} = 1 - e^{-\pi 3/(10.6\cdot 44.0)} = 1 - e^{-0.020\,2} = 1 - 0.979\,98 = 0.020\,0 = \boxed{2.00\%}.$$

γ. Η μέση τιμή της ενέργειας είναι κατά προσέγγιση ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους (η μέση τιμή σε μία περίοδο όρων ανάλογων με περιττές δυνάμεις ημιτόνων ή συνημιτόνων μηδενίζεται). Άρα έχουμε για την μέση τιμή της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2bt/2m} = E_0 e^{-bt/m}.$$

Απαιτούμε

$$0.05E_0 = E_0 e^{-3t/10.6}$$
$$0.05 = e^{-3t/10.6}$$
$$e^{+3t/10.6} = 20$$
$$\frac{3t}{10.6} = \ln 20 = 3.00$$
$$t = \boxed{10.6\ \mathrm{s}}$$

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η ακριβής ανάλυση δίνει ότι η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\gamma t}\left[2\cos^2 \omega t - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t\right) + \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2}\cos \omega t \cdot \sin \omega t\right]$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι όροι μέσα στην αγκύλη είναι μια περιοδική συνάρτηση με μέση τιμή 1 και επομένως η μείωση της ενέργειας οφείλεται στον εκθετικό όρο. Για παράδειγμα η προσέγγιση που χρησιμοποιούμε δίνει ότι ο χρόνος για να μειωθεί η ενέργεια στο 5% είναι t=10.585s ενώ η ακριβής λύση t=10.595s (διαφορά μικρότερη του 1‰).

ΑΣΚΗΣΗ 5

Σωματίδιο μάζας $m = 2\ kg$ κινείται πάνω στον άξονα των x και έλκεται προς την αρχή O απο μία δύναμη $\vec{F} = -8 \cdot x \cdot\ \hat{\imath} N$. Για $t = 0, x_0 = 20\ m, v_0 = 0$ βρείτε:

α) Τη διαφορική εξίσωση της κίνησης

β) Τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου σαν συναρτήσεις του χρόνου

γ) Το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης.

δ) Αν στο σωματίδιο επιδρά και δύναμη απόσβεσης $F_T = bv = 4v\ (N)$, όπου v η ταχύτητα, βρείτε τα $x(t)$και $v(t)$ και σχεδιάστε την $x(t)$.

ΛΥΣΗ

α) Ο δεύτερος Νόμος του Newton

$$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} = F}$$

δίνει για το πρόβλημά μας

$$\boldsymbol{2\frac{d^2x}{dt^2} = -8\,x \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 4\,x = 0}$$

δηλαδή $\boldsymbol{\omega = 2\ s^{-1}}$.

β) Για την λύση της προηγούμενης την παίρνουμε στη μορφή

$$\boldsymbol{x = A\cos(\omega\, t + \varphi)}$$

οπότε

$$\boldsymbol{v = -A\,\omega \sin(\omega\, t + \varphi)}$$

για $\boldsymbol{t = 0}$ αυτές δίνουν:

$$\begin{matrix} \mathbf{A\cos(\boldsymbol{\varphi}) = 20} \\ \boldsymbol{-A\,\omega\sin(\varphi) = 0} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A = 20\ m} \\ \boldsymbol{\varphi = 0} \end{cases}$$

όπου $\boldsymbol{n}$ ακέραιος.

Άρα

$$\boldsymbol{x = 20\cos\ (2t) m}$$
$$\boldsymbol{v = -40\sin(2t)\frac{m}{s}}$$

γ) Δείξαμε πως το πλάτος είναι $\boldsymbol{A = 20\ m}$. Επίσης,

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ s.}$$

δ) Για την περίπτωση αυτή ο δεύτερος Νόμος του Newton δίνει:

$$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} = -F - F_T \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 4\,x\ + 2\frac{dx}{dt}\ = 0.}$$

Γνωρίζουμε πως εξισώσεις της μορφής

$$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\,x\ = 0}$$

(όπου $\boldsymbol{\gamma = \frac{b}{2m}}$) έχουν λύσεις (εξ. (1.65) του βιβλίου)

$\boldsymbol{x = A_0 e^{-\gamma t}\cos(\,\omega t + \varphi)}$, με $\boldsymbol{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$.

Επομένως $\boldsymbol{\gamma = 1\ s^{-1}}$ και $\boldsymbol{\omega_0 = 2\ s^{-1}}$.

Άρα η ζητούμενη λύση θα είναι η
$\boldsymbol{x = A\ e^{-t}\cos(\omega t + \varphi)}$, όπου $\boldsymbol{\omega = \sqrt{3}\ s^{-1}}$.

Για την ταχύτητα παίρνουμε:

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = -Ae^{-t}[\cos(\omega t + \varphi) + \omega\sin(\omega t + \varphi)].}$$

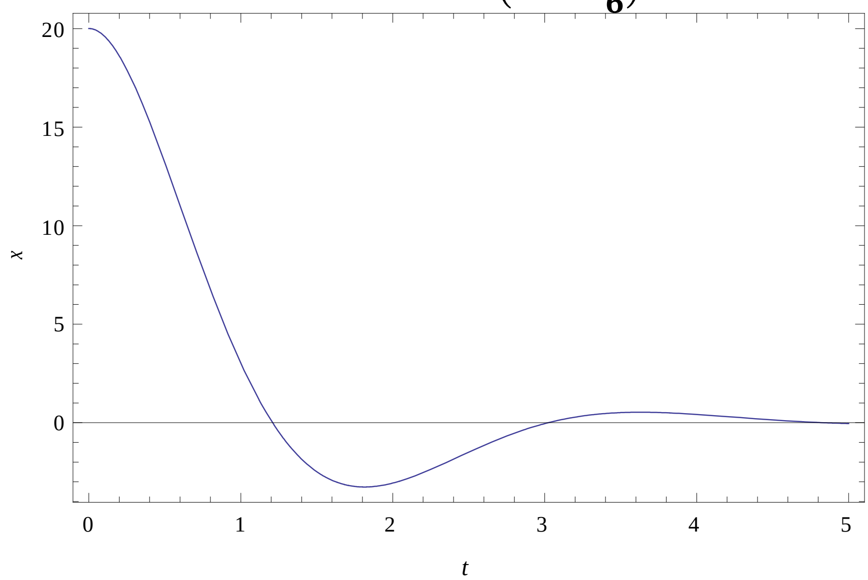
Για $\boldsymbol{t = 0}$ βρίσκουμε:

$$\begin{matrix} \mathbf{A\cos(\varphi) = 20} \\ \boldsymbol{-A(\cos(\varphi) + \ \omega\sin(\varphi)\,) = 0} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A = \dfrac{20}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} \approx 23.1\,m} \\ \boldsymbol{\varphi = \ -\pi/6} \end{cases}$$

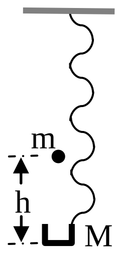
Επομένως τελικά

$$\boldsymbol{x = 23.1\ e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right)\ m,}$$

$$\boldsymbol{v = -23.1\ e^{-t}\left[\cos\left(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{6})\right]\ \frac{m}{s}.}$$



ΑΣΚΗΣΗ 6



Σε πλατφόρμα μάζας M, που είναι κρεμασμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k, πέφτει από ύψος h σώμα μάζας m και κολλάει πάνω της. Υπολογίστε το πλάτος των ταλαντώσεων του συστήματος.

ΛΥΣΗ

Είναι κατανοητό πως το σύστημα θα ταλαντώνεται γύρω από μια καινούργια θέση ισορροπίας που απέχει x_0 απο τη θέση, στην οποία βρίσκεται η πλατφόρμα πρίν κολλήσει πάνω της το σώμα m. Είναι εύκολα κατανοητό ότι

$$x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Για την ταλάντωση γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$(M+m)\,\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0,$$

με κυκλική συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

Επομένως η μετατόπιση και η ταχύτητα θα δίνονται απο τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{x = A\sin\,(\omega\, t + \varphi)}$$
$$\boldsymbol{v = \ A\,\omega\cos(\omega\, t + \varphi)},$$

από όπου βρίσκουμε

$$\boldsymbol{A = \sqrt{x^2 + \frac{v^2}{\omega^2}}}$$

Αρκεί λοιπόν για κάποιο $\boldsymbol{x}$ να βρεθεί το $\boldsymbol{v}$, οπότε υπολογίζεται το $\boldsymbol{A}$. Ξέρουμε το $\boldsymbol{x_0}$. Αρκεί να υπολογίσουμε το $\boldsymbol{v_0}$, δηλαδή την ταχύτητα που έχει η πλατφόρμα με το σώμα μόλις αρχίσει να κινείται. Το σώμα, λίγο πρίν την κρούση με την πλατφόρμα, έχει ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ που υπολογίζεται απο την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}.}$$

Απο την αρχή διατήρησης της ορμής πρίν και μετά τη κρούση:

$$\boldsymbol{mv = (M+m)v_0}$$

βρίσκουμε

$$\boldsymbol{v_0 = \frac{m\sqrt{2gh}}{M+m}}$$

Αντικαθιστώντας τα $\boldsymbol{x_0}$ και $\boldsymbol{v_0}$ στην σχέση για το πλάτος, βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{(M+m)g}}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Στο άκρο νήματος μήκους l και μάζας m είναι δεμένη σφαίρα μάζας M και ακτίνας R. Το νήμα μπορεί να θεωρηθεί ράβδος και κρέμεται από την οροφή. Εκτρέπουμε την σφαίρα κατά μικρή γωνία.

α) Γράψτε την εξίσωση της κίνησης

β) Βρείτε τη περίοδο της ταλάντωσης

γ) Εξετάστε τη περίπτωση $m \to 0$ και $R \ll l$.

ΛΥΣΗ
Προφανώς έχουμε να κάνουμε με φυσικό εκκρεμές.

α) Έστω I η ροπή αδράνειας του ως προς το σημείο ανάρτησης Ο και b η απόσταση του Κ.Μ, C, απο το Ο. Τότε από την εξίσωση των ροπών θα έχουμε:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(M+m)gb\sin\theta.$$

Για μικρές γωνίες θ, παίρνουμε την εξίσωση της κίνησης

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(M+m)}{I}gb\theta = 0,$$

που είναι εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης.

Μένει τώρα να υπολογίσουμε τα b και I. Το νήμα μπορεί να θεωρηθεί ράβδος. Επομένως η ροπή αδράνειάς του ως προς το Ο θα είναι:

$$I_N = \frac{1}{3}m\,l^2.$$

Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς το Ο είναι:

$$I_\Sigma = \frac{2}{5}\,MR^2 + \,M(R+l)^2.$$

Άρα η ολική ροπή αδράνειας είναι:

$$I = \frac{1}{3}m\,l^2 + \frac{2}{5}\,MR^2 + \,M(R+l)^2.$$

Εύκολα βρίσκουμε επίσης ότι:

$$b = \frac{\frac{ml}{2} + M(R+l)}{M+m}$$

Τελικά λοιπόν

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\frac{\frac{ml}{2} + M(R+l)\ \ \theta}{\frac{1}{3}m\,l^2 + \frac{2}{5}\,MR^2 + \,M(R+l)^2} = 0$$

β) Η περίοδος θα είναι

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}m\,l^2 + \frac{2}{5}\,MR^2 + \,M(R+l)^2}{g(\frac{ml}{2} + M(R+l))}}$$

γ) Για $m \to 0$ βρίσκουμε

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{2\frac{R^2}{5} + (R+l)^2}{g\,(R+l)}}$$

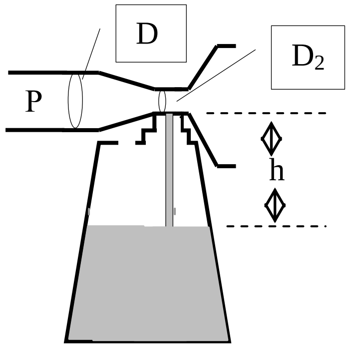
ενώ για $R \ll l$, δηλαδή για $l + R \approx l$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Επομένως εύκολα καταλαβαίνουμε πως ένα εκκρεμές, όπως αυτό που περιγράψαμε πιό πάνω, μπορεί εύκολα να θεωρηθεί απλό, αρκεί το νήμα να έχει πολύ μικρή μάζα (αμελητέα), ενώ η ακτίνα της σφαίρας να είναι πολύ μικρότερη από το μήκος του νήματος.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ψεκαστήρας βαφέα φαίνεται απλουστευμένος στο σχήμα. Υπολογίστε την απαιτουμένη πίεση P στο δοχείο πίεσης, ώστε να ανυψώνεται το διαλυμένο χρώμα από το δοχείο χρώματος μέχρι το σωληνάκι ψεκασμού, αν η πυκνότητα του διαλυμένου χρώματος είναι ρ = 1.3 gr/cm^3 και το ιξώδες του μηδαμινό. Απαιτουμένη παροχή πεπιεσμένου αέρος, Π = 100lt/min. Διάμετροι σωλήνων, D_1 = 10mm και D_2 = 2mm. h = 25mm. Η πυκνότητα του αέρος είναι ανάλογος της πίεσης, $\rho_1/P_1 = \rho_2/P_2$, και σε ατμοσφαιρική πίεση ισούται με $\rho_{αερ.\ 1\ atm}$ = 1.29kg/m^3.
1 atm= 10^5Pa.



ΛΥΣΗ

Γράφουμε την εξίσωση του Bernoulli για οριζόντια παροχή, για την περιοχή D_1 και την D_2

$\frac{1}{2}\ \rho_1\ \upsilon_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\ \rho_2\ \upsilon_2^2 + P_2$ (1)

όπου $P_1 = P$, P_2 ή πίεση στην περιοχή D_2 και υ_1 και υ_2 οι αντίστοιχες ταχύτητες.

Επίσης η παροχή αέρος, $Π = ΔV/ΔT = A_1\ \upsilon_1 = A_2\ \upsilon_2$ (2)

όπου A_1 και A_2 οι αντίστοιχες διατομές των σωλήνων στο D_1 και D_2. Εδώ έχουμε υποθέσει ότι οι πυκνότητες είναι κατά προσέγγιση ίσες.

Τέλος αν η διατομή του σωληνίσκου του χρώματος είναι A, για να είναι ο σωληνίσκος γεμάτος χρώμα πρέπει το βάρος του χρώματος μέσα στον σωληνίσκο και σε ύψος h να ισούται με την δύναμη λόγω της διαφοράς πιέσεων P_2 και P_o, όπου P_o η ατμοσφαιρική πίεση στη επιφάνεια του χρώματος (όπως φαίνεται στο σχήμα το δοχείο είναι ανοικτό στον ατμοσφαιρικό αέρα):

$A\ h\ \rho\ g = (P_o - P_2)\ A \rightarrow$

$P_2 = P_o - h\ \rho\ g = 10^5\ Pa - 25\ 10^{-3}m\ 1.3\ 10^3 kg/m^3\ 9.81\ m/s^2 = 9.97\ 10^4 Pa$ (3)

Από την (2) έχουμε: $\upsilon_1 = Π/A_1$ και $\upsilon_2 = Π/A_2$ (4)

Τέλος, από την σχέση της πίεσης και της πυκνότητας του αέρα, $\rho_1/P_1 = \rho_2/P_2$, έχουμε:

$\rho_1 = \rho_2\ P_1/P_2$, όπου $\rho_2 = \rho_{αερ.\ 1\ atm}$ (5)

Συνδυάζοντας τις (1), (3), (4) και (5) και λύνουμε ως προς $P = P_1$ (εξ ορισμού):

$\frac{1}{2}\ \rho_1\ \upsilon_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\ \rho_2\ \upsilon_2^2 + P_2 \rightarrow$

$$\frac{1}{2}\cdot\rho_2\cdot\frac{P}{P_2}\cdot\frac{Π^2}{A_1^2} + P = \frac{1}{2}\cdot\rho_2\cdot\frac{Π^2}{A_2^2} + P_2 \rightarrow$$

$$P\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\rho_2\cdot\frac{1}{P_2}\cdot\frac{Π^2}{A_1^2} + 1\right) = \frac{1}{2}\cdot\rho_2\cdot\frac{Π^2}{A_2^2} + P_2 \rightarrow$$

$$P = \frac{\rho_2\cdot\frac{Π^2}{A_2^2} + 2\cdot P_2}{\rho_2\cdot\frac{Π^2}{A_1^2}\cdot\frac{1}{P_2} + 2} = \frac{1.29\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{10^{-2}}{60^2}\frac{m^6}{s^2}\cdot\left(\frac{4}{3.14\cdot 4\cdot 10^{-6}}\right)^2\frac{1}{m^4} + 2\cdot 9.97\ 10^4 Pa}{1.29\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{10^{-2}}{60^2}\frac{m^6}{s^2}\cdot\left(\frac{4}{3.14\cdot 100\cdot 10^{-6}}\right)^2\frac{1}{m^4}\cdot\frac{1}{9.97\ 10^4}\frac{1}{Pa} + 2} =$$

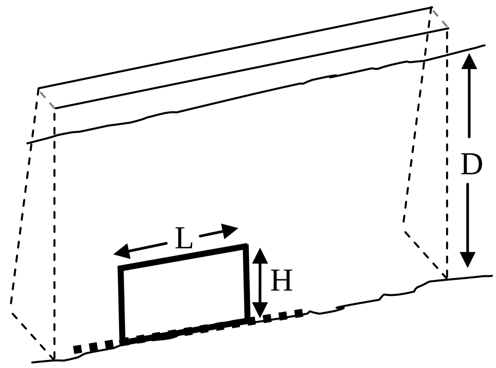
$$= \frac{1.29\cdot\frac{10^{-2}}{60^2}\cdot\left(\frac{4}{3.14\cdot 4\cdot 10^{-6}}\right)^2 + 2\cdot 9.97\ 10^4}{1.29\cdot\frac{10^{-2}}{60^2}\cdot\left(\frac{4}{3.14\cdot 100\cdot 10^{-6}}\right)^2 + 2\cdot 9.97\ 10^4}\cdot 9.97\ 10^4 Pa =$$

$$= \frac{3.58\cdot 10^{-6}\cdot 1.013\cdot 10^{11} + 2\cdot 9.97\ 10^4}{3.58\cdot 10^{-6}\cdot 1.62\cdot 10^8 + 2\cdot 9.97\ 10^4}\cdot 9.97\ 10^4\ Pa =$$

$= 2.81\ \ 9.97\ \ 10^4$ Pa = 2.8 10^5 Pa ≅ 2.8 atm.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Φράγμα το οποίο συγκρατεί νερό βάθους D = 30m έχει κοντά στον πυθμένα πύλες εκκένωσης ύψους H = 2m και μήκους L = 3m. Υπολογίστε: α) την συνολική δύναμη που ασκείται σε κάθε πύλη και β) την ροπή γύρω από άξονα περιστροφής τους (διακεκομμένη γραμμή) που βρίσκεται στην βάση του φράγματος και παράλληλος προς αυτήν.



ΛΥΣΗ

α) Κατ' αρχήν έχουμε ότι η πίεση σε ένα υγρό σε συνάρτηση με το βάθος δίνεται από την σχέση:

$P = P_0 + \rho \cdot g \cdot h$, όπου P η πίεση σε βάθος h, ρ η πυκνότητα του υγρού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και P_o η πίεση αναφοράς, συνήθως η ατμοσφαιρική πίεση.

Επειδή η δύναμης F που οφείλεται σε πίεση P ισούται κατά μέτρο με F = P A, όπου A το εμβαδόν της επιφάνειας που υφίσταται την πίεση P και φορά κάθετη και προς την επιφάνεια, σε περίπτωση όπου η πίεση δεν είναι σταθερή λόγω βάθους όπως στην άσκηση, πρέπει να εφαρμόσουμε αυτόν τον τύπο και να υπολογίσουμε την στοιχειώδη δύναμη σε περιοχές όπου θεωρούμε την πίεση σταθερή (δηλαδή σε στοιχειώδης επιφάνειες, σε σταθερό βάθος) και να προσθέσουμε όλες αυτές τις συνιστώσες. Έτσι η στοιχειώδης δύναμη στην στοιχειώδη επιφάνεια dA κάθε πύλης , σε σταθερό βάθος h, θα είναι:

$$\mathrm{dF} = \mathrm{P}\ \mathrm{dA} = \left(\mathrm{P_o} + \rho \cdot g \cdot \mathrm{h} - \mathrm{P_o'}\right) \mathrm{dA} \qquad (1)$$

όπου P_o η ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της λίμνης, P_o' η ατμοσφαιρική πίεση από την άλλη πλευρά της πύλης, εκτός νερού με, προφανώς $P_o = P_o$' και dA στοιχειώδης επιφάνεια της πύλης με διαστάσεις L dh (όπου dh στοιχειώδες ύψος της πύλης).

Τελικά θα έχουμε για την δύναμη F που ασκείται συνολικά κάθετα στην πύλη, με D' = D – H, το βάθος του πάνω μέρους της πύλης:

$$F = \int dF = \int_{D'}^{D} \rho \cdot g \cdot h \cdot L \cdot dh = \rho \cdot g \cdot L \cdot \int_{D'}^{D} h \cdot dh =$$
$$= \rho \cdot g \cdot L \cdot 0.5 \cdot (D^2 - D'^2)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$F = \rho \cdot g \cdot L \cdot 0.5 \cdot (D^2 - D'^2) =$$
$$= 10^3\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9.81\ \frac{m}{s^2} \cdot 3m \cdot 0.5\ \cdot (30^2 m^2 - 28^2 m^2) =$$
$$= 10^3\ \cdot 9.81 \cdot 3 \cdot 0.5\ \cdot (30^2 - 28^2) N = 1.71 \cdot 10^6 N$$

β) Η στοιχειώδης ροπή κατά μέτρο, dτ, που οφείλεται στην δύναμη dF (που εξασκείται στην επιφάνεια dA, ισούται με dτ = dF x, όπου x η απόσταση της dA από τον άξονα περιστροφής, ο οποίος είναι παράλληλος με τον βυθό σε βάθος D. Το x = D – h, όπου h, όπως και προηγουμένως είναι το βάθος που βρίσκεται η επιφάνεια dA.

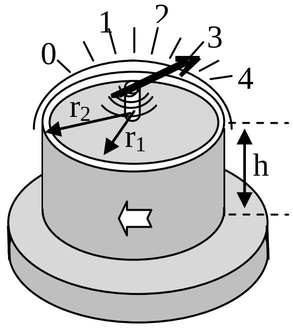
Θα είναι:

$$\tau = \int d\tau = \int dF \cdot x = \int_{D'}^{D} \rho \cdot g \cdot h \cdot L \cdot (D - h) \cdot dh$$

$$= \rho \cdot g \cdot L \cdot \left(D \cdot \int_{D'}^{D} h \cdot dh - \int_{D'}^{D} h^2 \cdot dh\right) =$$
$$= \rho \cdot g \cdot L \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot D \cdot \left(D^2 - D'^2\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(D^3 - D'^3\right)\right) =$$
$$= 10^3\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9.81\ \frac{m}{s^2} \cdot 3m \cdot (0.5 \cdot 30 \cdot (30^2 - 28^2) - 0.333 \cdot (30^3 - 28^3)) m^3 =$$

$= 10^3 \cdot 9.81 \cdot 3 \cdot (1740 - 1681)\ N \cdot m = 1.74 \cdot 10^6\ N \cdot m$

ΑΣΚΗΣΗ 10



Μετρητής ιξώδους, του οποίου η λειτουργία στηρίζεται προσεγγιστικά στο πείραμα ορισμού του ιξώδους, αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με ελάχιστα διαφορετικές ακτίνες r_1 και r_2, εκ των οποίων ο εξωτερικός κύλινδρος περιστρέφεται μηχανικά με γωνιακή ταχύτητα ω, ο δε εσωτερικός φέρει δείκτη και ελατήριο επαναφοράς. Ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους τοποθετούμε το υγρό του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε το ιξώδες. Θέτουμε τον εξωτερικό κύλινδρο σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα ω, οπότε λόγω του ιξώδους, εξασκείται ροπή T στον εσωτερικό κύλινδρο, την οποία μετράμε με τον σχετικό δείκτη. Υπολογίστε το ιξώδες με αυτήν την μέθοδο αν, r_1 = 4.00cm, r_2 = 4.28cm, ω = 20στροφ/min, T = 3.24 Nm και h = 10.0cm το ύψος του υγρού ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους.

ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό του ιξώδους έχουμε:

$\sigma = F/s = \eta \cdot \upsilon_o / d \rightarrow \eta = F \cdot d / (\upsilon_o \cdot s)$ (1) , όπου η ο συντελεστής ιξώδους, υ_o η σχετική ταχύτητα των δύο επιφανειών εμβαδού s, d η απόσταση τους και F η δύναμη που πρέπει να εφαρμόζεται στην μέσα επιφάνεια.

Στην άσκηση, η επιφάνεια s ισούται με την περίμετρο του εσωτερικού κυλίνδρου επί το ύψος του υγρού ανάμεσα στους κυλίνδρους, $s = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot h$ και d η απόσταση των κυλίνδρων, $d = (r_2 - r_1)$. Παρατηρήστε ότι στην προσέγγιση $r_1 - r_2 << r_1, r_2$ δεν έχει σημασία αν θα θεωρήσουμε την εσωτερική ή την εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια. Στην πράξη, συμβατικά επιλέγουμε την εσωτερική επιφάνεια.

Η ταχύτητα $\upsilon_o = \omega \cdot r_2$, με $\omega = 20 \cdot 2 \cdot \pi / 60$ rad/s

Τέλος η ροπή T ισούται με $T = F \cdot r_1 \rightarrow F = T / r_1$

Με τα παραπάνω η (1) γίνεται:

$$\eta = \frac{F \cdot d}{\upsilon_o \cdot s} = \frac{T \cdot (r_2 - r_1)}{r_1 \cdot \omega \cdot r_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot h} =$$

$$= \frac{3.24\ Nm \cdot 2.8 \cdot 10^{-3} m \cdot 60 s}{4.00^2 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot 20 \cdot 4.28 \cdot 10^{-2} m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0.1 m} =$$

$$= \frac{3.24 \cdot 2.8 \cdot 10^{-3} \cdot 60}{4.00^2 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 4.28 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 0.1} \frac{Ns}{m^2} = \quad 100.7\ \frac{Ns}{m^2}$$