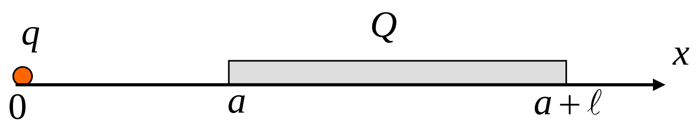
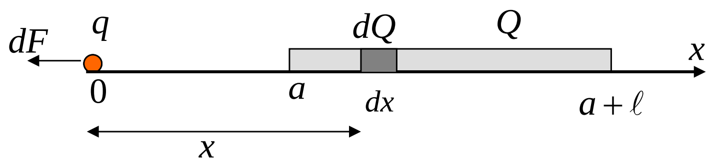
ΦΥΕ14, 2009-2010-Εργασιά 6η
Ημερομηνία παράδοσης 28/6/2010

Άσκηση 1

Α) Μια ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη θετικά με συνολικό ηλεκτρικό φορτίο Q και βρίσκεται κατά μήκος του θετικού άξονα x από το σημείο $x = a$ μέχρι $x = a + \ell$. Ένα θετικό σημειακό φορτίο q βρίσκεται στη αρχή του άξονα ($x = 0$). (α) Υπολογίστε το μέτρο και βρείτε την κατεύθυνση της δύναμης που ασκεί πάνω στο q η κατανομή του φορτίου Q. (β) Τι μορφή παίρνει η δύναμη, αν $a >> \ell$;



Λύση



(α) Η γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda = \dfrac{dQ}{dx}$ ισούται με $\lambda = \dfrac{Q}{\ell}$ λόγω ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου Q πάνω στη ράβδο. Επομένως, το φορτίο dQ που αντιστοιχεί σε μήκος dx θα είναι

$$dQ = \frac{Q}{\ell} dx \qquad (1)$$

Έστω x η απόσταση μεταξύ q και dQ. Το φορτίο dQ ασκεί απωστική δύναμη dF επί του φορτίου q, η οποία κατευθύνεται προς τον αρνητικό άξονα x και από τον νόμο του Coulomb έχει μέτρο:

$$dF = k\frac{qdQ}{x^2} = k\frac{Q}{\ell}\frac{qdx}{x^2}, \text{ λόγω της } (1)\text{ , όπου } (k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0})$$

Η συνολική δύναμη είναι το διανυσματικό ολοκλήρωμα όλων των $\overrightarrow{dF}$, οι οποίες αφού έχουν την ίδια διεύθυνση και φορά, ολοκληρώνονται αλγεβρικά:

$$F = \int dF = k\frac{Qq}{\ell}\int_a^{a+\ell}\frac{dx}{x^2} = -k\frac{Qq}{\ell}\left[\frac{1}{x}\right]_a^{a+\ell} = k\frac{Qq}{\ell}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\ell}\right) = k\frac{Qq}{a(a+\ell)}$$

Η δύναμη κατευθύνεται προς τον αρνητικό άξονα x, δηλαδή

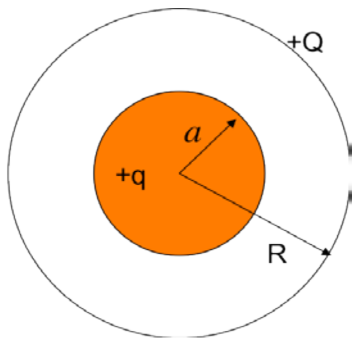
$$\vec{F} = -k\frac{Qq}{a(a+\ell)}\hat{i} \qquad (2)$$

(β) Αν $a >> \ell$ (δηλαδή το φορτίο q βρίσκεται πολύ μακριά από τη ράβδο), τότε από την (2) προκύπτει:

$$\vec{F} \approx -k\frac{Qq}{a^2}\hat{i}\,,$$

δηλαδή η κατανομή του φορτίου της ράβδου συμπεριφέρεται σαν να ήταν ένα σημειακό φορτίο Q.

B) Μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας α είναι ομόκεντρη με έναν μεγαλύτερο λεπτό σφαιρικό φλοιό ακτίνας R. Αν τα φορτία των σφαιρών έχουν τιμές $+q$ και $+Q$ αντίστοιχα, να βρεθεί η διαφορά δυναμικού $V_a - V_R$ μεταξύ των δύο σφαιρών.



Λύση

Εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss, παίρνοντας σαν επιφάνεια Gauss σφαίρα ακτίνας r, της οποίας το κέντρο συμπίπτει με το κέντρο των δύο σφαιρών ($a < r < R$).

$$\oint \vec{E}\bullet d\vec{A} = \frac{+q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint EdA\cos 0 = \frac{+q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\oint dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (1)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει ακτινική κατεύθυνση προς τα έξω.

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σφαιρών βρίσκεται από την παρακάτω έκφραση και με χρήση της σχέσης (1):

$$V_a - V_R = \int_a^R \vec{E}\bullet d\vec{r} = \int_a^R Edr\cos 0 = \int_a^R Edr = \int_a^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^R \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{a}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right)$$

Άρα:

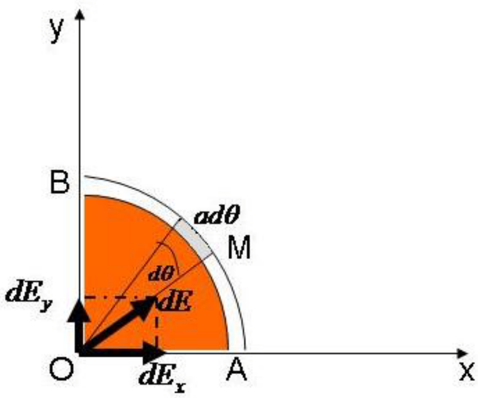
$$V_a - V_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right),$$

δηλαδή η ζητούμενη διαφορά δυναμικού δεν εξαρτάται από το φορτίο Q του εξωτερικού φλοιού.

Άσκηση 2

Αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο $-Q$ κατανέμεται ομοιόμορφα πάνω σε τμήμα στεφάνης σχήματος τεταρτοκύκλιου ακτίνας α. Το τεταρτοκύκλιο βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και το κέντρο καμπυλότητάς το υ είναι στην αρχή των συντεταγμένων Ο. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Ο.

Λύση



Θεωρούμε στοιχειώδες τμήμα της στεφάνης μήκους dl σε σημείο Μ, το οποίο φέρει φορτίο dQ.

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \qquad (1)$$

Λόγω ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου είναι:

$$\lambda = -\frac{Q}{\pi a/2} = -\frac{2Q}{\pi a} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει

$$dQ = -\frac{2Q}{\pi a}dl = -\frac{2Q}{\pi a}a d\theta = -\frac{2Q}{\pi}d\theta \qquad (3)$$

όπου $d\theta$ η στοιχειώδης γωνία που αντιστοιχεί στο τόξο dl.

Το ηλεκτρικό πεδίο dE στο σημείο Ο έχει μέτρο

$$dE = k\frac{dQ}{a^2} = k\frac{2Qd\vartheta}{\pi a^2}, \text{ λόγω της (3) και } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Έστω $\theta = \measuredangle AOM$. Η x-συνιστώσα του ηλεκτρικού αυτού πεδίου θα είναι θετική, (αφού το φορτίο $dQ < 0$) και θα δίνεται από τη σχέση

$$dE_x = dE\cos\vartheta = k\frac{2Q\cos\vartheta d\vartheta}{\pi a^2} \qquad (4)$$

Ομοίως, η y-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου θα είναι θετική και θα ισούται με $dE_y = dE\sin\vartheta = k\frac{2Q\sin\vartheta d\vartheta}{\pi a^2}$ (5)

Οι συνιστώσες E_x και E_y του πεδίου στο Ο προκύπτουν από την ολοκλήρωση των (4) και (5) αντίστοιχα, δηλαδή:

$$E_x = \int dE_x = k\frac{2Q}{\pi a^2}\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta d\vartheta = k\frac{2Q}{\pi a^2}\left[\sin\vartheta\right]_0^{\pi/2} = k\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}$$

$$E_y = \int dE_y = k\frac{2Q}{\pi a^2}\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta d\vartheta = k\frac{2Q}{\pi a^2}\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/2} = k\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}$$

Επομένως:

$$E_x = E_y = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}$$

ή

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}(\hat{i} + \hat{j})$$

Η γωνία που σχηματίζει το ηλεκτρικό πεδίο στο Ο με τον θετικό άξονα x είναι $\varphi = 45^0$.

Άσκηση 3

Α) Σφαιρική σταγόνα νερού, που φέρει φορτίο $Q = 3\times10^{-11}\ C$, έχει δυναμικό $V = 500\ V$ στην επιφάνειά της. (α) Πόση είναι η ακτίνα της σταγόνας; (β) Αν δύο τέτοιες σταγόνες, με το ίδιο φορτίο και ακτίνα, ενωθούν για να σχηματίσουν μια μόνο σφαιρική σταγόνα, ποιο είναι το δυναμικό στην επιφάνεια της νέας σταγόνας που σχηματίστηκε μ' αυτό τον τρόπο;

Λύση

(α) Το δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας είναι ίδιο με την περίπτωση που όλο το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο της σφαιρικής κατανομής, δηλαδή,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

όπου R η ακτίνα της σφαίρας. Οπότε, $R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{V}$. Με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$R = \frac{9x10^9 x3x10^{-11}}{500} N.m^2.C^{-2}\frac{C}{V} = 5.4x10^{-4} m = 0.54mm$$

(β) Έστω R_1 η ακτίνα της νέας σταγόνας. Ο όγκος της θα είναι διπλάσιος του όγκου της μιας. Επομένως:

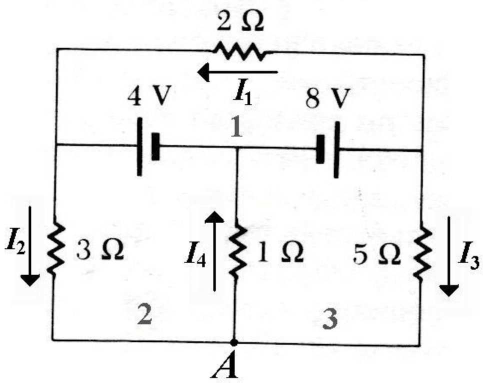
$$\frac{4}{3}\pi R_1^3 = 2.\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R_1^3 = 2R^3 \Rightarrow R_1 = (2)^{\frac{1}{3}} R = 1.26R$$

Εξάλλου, το φορτίο της νέας σταγόνας είναι 2Q, λόγω της αρχής διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Άρα το δυναμικό στην επιφάνεια της νέας σταγόνας θα είναι:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q}{(2)^{\frac{1}{3}} R} = 794V.$$

Β)

Να προσδιορισθούν οι τιμές του ρεύματος που διαρρέουν τις αντιστάσεις του παρακάτω κυκλώματος



<u>Λύση</u>

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στον βρόχο 1 έχουμε:

$$8V - I_1 \cdot 2\Omega - 4V = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{4V}{2\Omega} = 2\text{A} \qquad (1)$$

Για τους βρόχους 2 και 3 έχουμε αντίστοιχα

$$4V - I_2 \cdot 3\Omega - I_4 \cdot 1\Omega = 0 \qquad (2)$$

$$8V - I_3 \cdot 5\Omega - I_4 \cdot 1\Omega = 0 \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξ. (2) επί 2 και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$-I_2 \cdot 6\Omega - I_4 \cdot 2\Omega + I_3 \cdot 5\Omega + I_4 \cdot 1\Omega = 0 \Rightarrow -I_2 \cdot 6\Omega - I_4 \cdot 1\Omega + I_3 \cdot 5\Omega = 0 \qquad (4)$$

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στον εξωτερικό βρόχο προκύπτει ότι

$$-I_1 \cdot 2\Omega - I_2 \cdot 3\Omega + I_3 \cdot 5\Omega = 0 \Rightarrow -I_2 \cdot 3\Omega + I_3 \cdot 5\Omega = 4V \qquad (5)$$

Τέλος, από τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο Α προκύπτει ότι

$$I_2 + I_3 = I_4 \qquad (6)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (4), (5), (6) προκύπτει τελικά ότι

$$I_2 = \frac{16}{23}A, \qquad I_3 = \frac{28}{23}A, \qquad I_4 = \frac{44}{23}A$$

Άσκηση 4

Ένα πρωτόνιο που αρχικά βρισκόταν σε κατάσταση ηρεμίας επιταχύνεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης $E = 640N/C$. Μετά από ορισμένο χρόνο t η ταχύτητά του είναι $\upsilon = 1.20 \times 10^6 m/s$ (μη σχετικιστική αφού $\upsilon << c$)

α) Να βρεθεί η επιτάχυνση του πρωτονίου

β) Πόσος χρόνος χρειάζεται για να αποκτήσει το πρωτόνιο αυτή την ταχύτητα;

γ) Πόσο διάστημα διήνυσε στο χρόνο αυτό;

δ) Ποια είναι η κινητική ενέργεια του πρωτονίου;

ε) Σε πόσο χρόνο θα αποκτούσε ένα ηλεκτρόνιο την ίδια ταχύτητα;

στ) Ποια θα πρέπει να ήταν η τιμή της έντασης του πεδίου ώστε ένα ηλεκτρόνιο να αποκτήσει την ίδια ταχύτητα στον ίδιο χρόνο;

(Δίνεται ότι $m_e = 9.109 \times 10^{-31} kg$, $m_p = 1.672 \times 10^{-27} kg$ και $q = 1.6 \times 10^{-19} C$)

Λύση

α) Η δύναμη που δέχεται το πρωτόνιο είναι

$$F = q \cdot E = 1.6 \times 10^{-19} C \cdot 640 N/C = 1.024 \times 10^{-16} N$$

Επομένως η επιτάχυνση του πρωτονίου είναι

$$a = \frac{F}{m_p} = \frac{1.024 \times 10^{-16} N}{1.672 \times 10^{-27} kg} = 6.124 \times 10^{10} \frac{m}{s^2}$$

β) Έχουμε ότι $\upsilon = \alpha t \Rightarrow t = \dfrac{\upsilon}{\alpha} = \dfrac{1.20 \times 10^6 \frac{m}{s}}{6.124 \times 10^{10} \frac{m}{s^2}} = 0.196 \times 10^{-4} s = 19.6 \mu s$

γ) $s = \dfrac{1}{2} a t^2 = \dfrac{1}{2} 6.124 \times 10^{10} \dfrac{m}{s^2} \cdot \left(0.196 \times 10^{-4} s\right)^2 = 0.1176 \times 10^2 m = 11.76 m$

δ) $E_K = \dfrac{1}{2} m_p \upsilon^2 = \dfrac{1}{2} 1.672 \times 10^{-27} kg \cdot \left(1.20 \times 10^6 \dfrac{m}{s}\right)^2 = 1.204 \times 10^{-15} J = 7.525 keV$

ε) Εφόσον το ηλεκτρόνιο έχει το ίδιο φορτίο με το πρωτόνιο ασκείται η ίδια δύναμη $F = 1.024\times10^{-16} N$, άρα η επιτάχυνσή του είναι

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{1.024\times10^{-16} N}{9.109\times10^{-31} kg} = 1.124\times10^{14} \frac{m}{s^2}$$

Άρα από τη σχέση $\upsilon = \alpha t$, προκύπτει ότι:

$$t = \frac{\upsilon}{\alpha} = \frac{1.20\times10^{6} \frac{m}{s}}{1.124\times10^{14} \frac{m}{s^2}} = 1.068\times10^{-8} s = 10.68 ns$$

στ) Για να αποκτήσει το ηλεκτρόνιο την ίδια ταχύτητα στον ίδιο χρόνο θα πρέπει να υφίσταται την ίδια επιτάχυνση με το πρωτόνιο.
Άρα:

$$a = \frac{F}{m_e} = 6.124\times10^{10} \frac{m}{s^2} \Rightarrow F = m_e \cdot a = 9.109\times10^{-31} kg \cdot 6.124\times10^{10} \frac{m}{s^2} = 5.58\times10^{-20} N$$

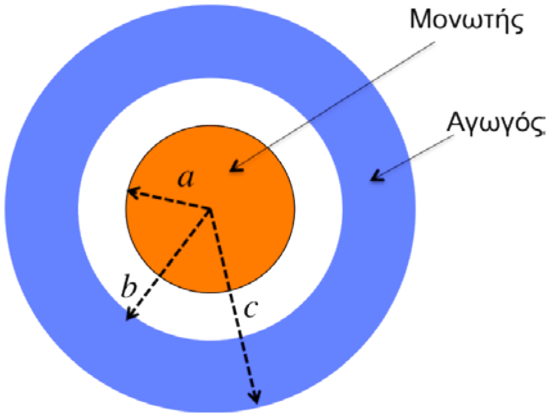
Άρα από τη σχέση $F = q\cdot E$ έχουμε ότι :

$$E = \frac{F}{q} = \frac{5.58\times10^{-20} N}{1.6\times10^{-19} C} = 0.349 \frac{N}{C}$$

<u>Άσκηση 5</u>

Έστω ότι μία φορτισμένη μονωτική σφαίρα ακτίνας $a = 5\ cm$ περικλείεται από επίσης φορτισμένο αγώγιμο φλοιό εσωτερικής ακτίνας $b = 20\ cm$ και εξωτερικής ακτίνας $c = 25\ cm$. Εάν το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο που απέχει 10 cm από το κέντρο της σφαίρας έχει τιμή $E_1 = 3.6\times10^{3} N/C$ και φορά ακτινικά προς τα μέσα, ενώ σε ένα σημείο σε απόσταση 50 cm από το κέντρο της σφαίρας, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου είναι $E_2 = 2.0\times10^{2} N/C$ με φορά ακτινικά προς τα έξω, να υπολογισθούν: α) το φορτίο της μονωτικής σφαίρας, β) το συνολικό φορτίο του αγώγιμου φλοιού και γ) το φορτίο στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια του αγώγιμου φλοιού.

<u>Λύση</u>



Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss σε μία σφαιρική επιφάνεια που απέχει απόσταση $r_1 = 10cm$ από το κέντρο της σφαίρας έχουμε:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\sigma\varphi}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathrm{E} \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{q_{\sigma\varphi}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{\sigma\varphi} = \varepsilon_0 \mathrm{E} \cdot 4\pi r_1^2$$
$$= 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \times \left(-3.6 \times 10^3 \frac{N}{C} \right) \times 4 \times 3.14 \times 0.1^2 m^2$$
$$= -4.0 \times 10^{-9} C$$

Άρα το φορτίο της μονωτικής σφαίρας είναι $q_{\sigma\varphi} = -4.0 \times 10^{-9} C$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss σε μία σφαιρική επιφάνεια που απέχει απόσταση $r_2 = 50cm$ από το κέντρο της σφαίρας έχουμε:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \mathrm{E} \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{q_{o\lambda}}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_{o\lambda} = \varepsilon_0 \mathrm{E} \cdot 4\pi r_2^2$$
$$= 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \times 2.0 \times 10^2 \frac{N}{C} \times 4 \times 3.14 \times 0.5^2 m^2$$
$$= 5.56 \times 10^{-9} C$$

Άρα το ολικό φορτίο του συστήματος (σφαίρα + φλοιός) είναι $q_{o\lambda} = 5.56 \times 10^{-9} C$

Επομένως το συνολικό φορτίο του αγώγιμου φλοιού είναι

$$q_{\varphi\lambda} = q_{o\lambda} - q_{\sigma\varphi} = 5.56 \times 10^{-9} C - \left(-4.0 \times 10^{-9} C \right) = 9.56 \times 10^{-9} C$$

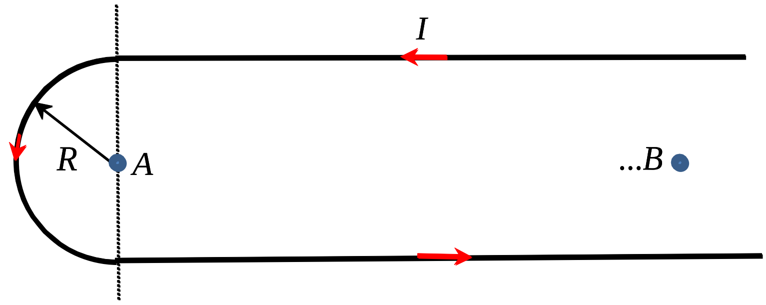
Για να υπολογίσουμε το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο φλοιός είναι αγώγιμος άρα το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του θα πρέπει να είναι μηδέν. Επομένως, από το νόμο του Gauss προκύπτει ότι το ολικό φορτίο που πρέπει να περιέχει μία σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα που κείται εντός του αγώγιμου φλοιού θα πρέπει να είναι επίσης μηδέν. Άρα το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια του φλοιού θα πρέπει να είναι ίσο και αντίθετο με το φορτίο της σφαίρας. Επομένως $q_{\varepsilon\sigma} = 4.0 \times 10^{-9} C$.

Επομένως το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού θα ισούται με το ολικό φορτίο του φλοιού μείον το φορτίο της εσωτερικής επιφάνειας.

Άρα $q_{\varepsilon\xi} = q_{\varphi\lambda} - q_{\varepsilon\sigma} = 9.56 \times 10^{-9} C - 4.0 \times 10^{-9} C = 5.56 \times 10^{-9} C$, ισούται δηλαδή με το ολικό φορτίο του συστήματος.

<u>Άσκηση 6</u>

Αγωγός απείρου μήκους σε σχήμα φουρκέτας, με το καμπύλο τμήμα του να σχηματίζει ημικύκλιο ακτίνας R, διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I . Υπολογίστε την ένταση του πεδίου στο κέντρο του ημικυκλίου A και σε ένα σημείο B στο μέσον της απόστασης των δύο αγωγών που βρίσκεται πάρα πολύ μακριά από το A.



Λύση

Στο σημείο Α:

Κάθε ένας από του ευθύγραμμους αγωγούς εκτείνεται στο άπειρο από τη μια πλευρά και συνεισφέρει το μισό της εξίσωσης (3.34) του βιβλίου, ή $\frac{1}{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$.

Επίσης το ημικύκλιο συνεισφέρει το ήμισυ του πλήρους κύκλου, η $\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0 I}{4R}$. Όλες οι συνιστώσες έχουν φορά προς τα έξω από το επίπεδο της σελίδας και προστίθενται. Έτσι, τελικά παίρνουμε για το μέτρο του πεδίου στο Α:

$$B_A = 2\cdot\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4R}=\frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{2}{\pi}+1\right)$$

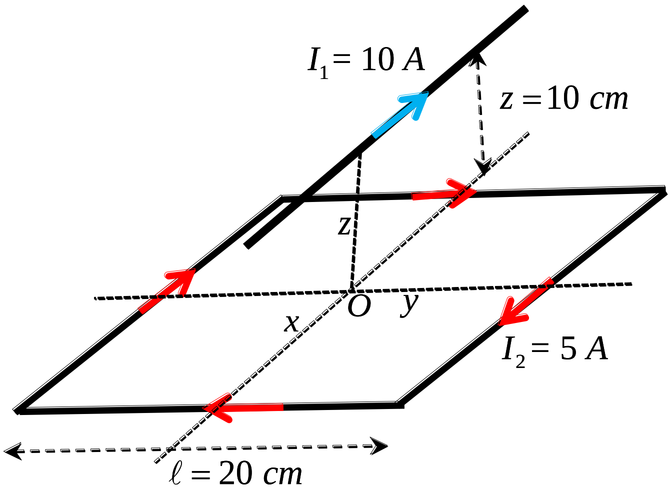
Στο σημείο Β:

Έχουμε μόνο τις δύο συνεισφορές από ευθύγραμμους αγωγούς απείρου μήκους που προστίθενται στην ίδια διεύθυνση :

$$B_{\mathrm{B}} = 2\cdot\frac{\mu_0 I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 I}{\pi R}$$

Άσκηση 7

Στο σχήμα φαίνεται τετράγωνος βρόχος, πλευράς $\ell = 20\ cm$, που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xy, με το κέντρο του στην αρχή των αξόνων O, και διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως $I_2 = 5\,A$. Πάνω από το βρόχο, και στο επίπεδο $y=0$, βρίσκεται ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους, ο οποίος είναι παράλληλος προς τον άξονα x, έχει απόσταση $z=10\ cm$ και διαρρέεται από ρεύμα $I_1 = 10\,A$. Να υπολογιστεί η ροπή που ασκείται στο βρόχο ως προ άξονα περιστροφής τον άξονα x.

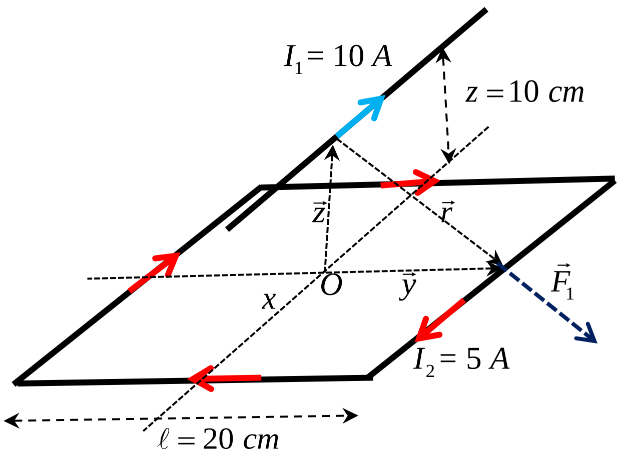


Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο βρόχο από την εσωτερική κυκλοφορία του ρεύματος I_2 δεν συμβάλουν στη ροπή γιατί βρίσκονται πάνω στο επίπεδο xy. Επίσης οι δυνάμεις που ασκούνται από τον άπειρο αγωγό στις δύο πλευρές του τετραγώνου που είναι παράλληλες στον άξονα y δεν συμβάλουν στη ροπή διότι είναι παράλληλες στον άξονα x.

Λύση 1 :

Υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο B_1 που δημιουργείται από τον άπειρο ρευματοφόρο αγωγό στη πλευρά του τετραγώνου που είναι παράλληλη προς τον άξονα x και έχει θετικό y όπως φαίνεται στο σχήμα :



$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\left(-\hat{\imath}\times\hat{r}\right) \qquad (1)$$

Αλλά , όπως φαίνεται από το σχήμα :

$$\vec{y} = \vec{z} + \vec{r} \Rightarrow y\hat{j} = z\hat{k} + r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{y}{r}\hat{j} - \frac{z}{r}\hat{k} \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας στη (2), $z = 0.1\,m,\quad y = 0.1\,m,\ r = \sqrt{(0.1\,m)^2 + (0.1\,m)^2} = 0.1\sqrt{2}\ m$ βρίσκουμε το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση r:

$$\hat{r} = \frac{y}{r}\hat{j} - \frac{z}{r}\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{j} - \hat{k}\right) \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας το $\hat{r}$ από την (3) στην (1) παίρνουμε :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\hat{i}\times\left(\hat{j}-\hat{k}\right)\right] = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{j}-\hat{k}\right) \quad (4)$$

Η αντίστοιχη δύναμη που ασκείται στον αγωγό είναι :

$$\vec{F}_1 = I_2\vec{\ell}\times\vec{B}_1 = \ell\cdot\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{i}\times\left(-\hat{j}-\hat{k}\right)\right] = \ell\cdot\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{k}+\hat{j}\right) \quad (5)$$

Με αντίστοιχους συλλογισμούς βρίσκουμε το πεδίο για την απέναντι πλευρά :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{j}+\hat{k}\right) \quad (6)$$

Και $$\vec{F}_2 = \ell\cdot\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{k}+\hat{j}\right) \quad (7)$$

Η ροπή που ασκείται στο βρόχο ως προς τον άξονα x είναι :

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1\times\vec{F}_1 + \vec{r}_2\times\vec{F}_2 = \frac{\ell}{2}\hat{j}\times\vec{F}_1 - \frac{\ell}{2}\hat{j}\times\vec{F}_2 \Rightarrow$$

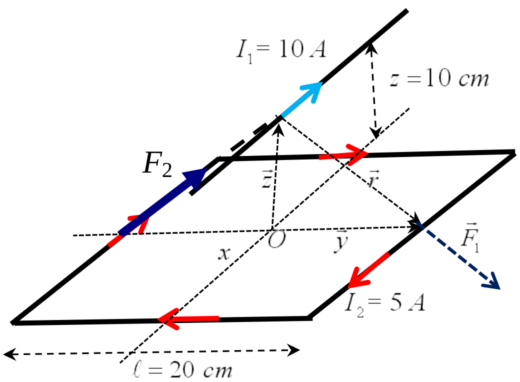
$$\vec{\tau} = \frac{\ell}{2}\cdot\ell\cdot\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{j}\times\left(-\hat{k}+\hat{j}\right) - \hat{j}\times\left(\hat{k}+\hat{j}\right)\right] = -\frac{\ell}{2}\cdot\ell\cdot\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi r}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} \quad (8)$$

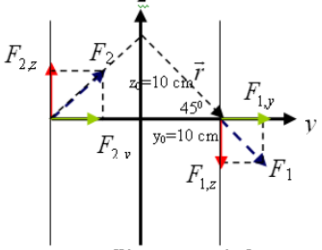
Με αντικατάσταση των αριθμητικών τιμών βρίσκουμε :

$$\vec{\tau} = -(0.1\ m)\cdot(0.2\ m)\frac{\left(4\pi\times10^{-7}\ N/A^2\right)\cdot 5\ A\cdot 10\ A}{\pi\left(0.1\sqrt{2}\ m\right)}\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} = -2.0\times10^{-6}\ \hat{i}\ N\cdot m$$

Συνοπτική Λύση 2 :

Από τη θεωρία (παρ. 3.6.3) γνωρίζουμε ότι οι όταν δύο παράλληλοι αγωγοί διαρρέονται από ρεύμα τότε οι αγωγοί έλκονται εάν τα ρεύματα είναι ομόρροπα και απωθούνται εάν είναι αντίρροπα, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.





Κάτοψη στο επίπεδο yz

Επίσης λόγω συμμετρίας του προβλήματος τα μέτρα των δύο δυνάμεων είναι ίσα.

$$F_1 = F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\ell$$

Προφανώς ροπή περί τον άξονα x δημιουργεί το ζεύγος των συνιστωσών των δυνάμεων κατά τον άξονα z, οι οποίες είναι $F_{1,z} = F_{2,z} = F\cos 45^0 = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\sqrt{2}\pi r}\ell$

όπου $r = \sqrt{(0.1\,m)^2 + (0.1\,m)^2} = 0.1\sqrt{2}\ m$

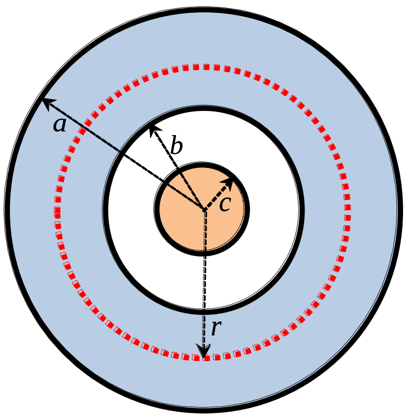
Άρα η ροπή είναι

$$\vec{\tau} = \vec{\ell} \times \vec{F}_{1,z} = -\ell F_{1,z}\hat{i} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\sqrt{2}\pi r}\ell^2 \hat{i}$$

$$= -\frac{\left(4\pi \times 10^{-7}\,N/A^2\right)\cdot 5\,A \cdot 10\,A}{2\pi\sqrt{2}\left(0.1\sqrt{2}\,m\right)}(0.2\ m)^2\hat{i} = -2.0\times 10^{-6}\ N\cdot m\ \ \hat{i}$$

<u>Άσκηση 8</u>

Το σχήμα δείχνει την εγκάρσια τομή αγωγού, πολύ μεγάλου μήκους, που ονομάζεται ομοαξονικό καλώδιο. Ο εσωτερικός αγωγός, ακτίνας c, και ο εξωτερικός, σε σχήμα κυλινδρικού φλοιού ακτίνων b, a διαρρέονται από αντιπαράλληλα ρεύματα i ίσης έντασης και ομοιόμορφης επιφανειακής πυκνότητας. Υπολογίστε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου $B(r)$ στις θέσεις $0 < r < c$, $c < r < b$, $b < r < a$, $a < r$.



<u>Λύση</u>

Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Ampere :

$$\oint \vec{B}\bullet d\vec{s} = \mu_0 I \quad (1)$$

Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας το μέτρο της έντασης του πεδίου στα σημεία περιφέρειας κύκλου με κέντρο τον άξονα του καλωδίου είναι σταθερό. Έτσι το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι πάντα $2\pi r B(r)$, όπου r η ακτίνα του κύκλου. Το δεξί μέρος όμως εξαρτάται από το συνολικό αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων που περικλείονται στο εσωτερικό της εκάστοτε περιφέρειας.

Α) Το ρεύμα στον εσώτερο αγωγό κατανέμεται σε επιφάνεια πc^2. Σε εσωτερικό κύκλο αυτού του αγωγού ($0 < r < c$) αντιστοιχεί επιφάνεια πr^2. Οπότε το κλάσμα του ρεύματος που περιλαμβάνει είναι:

$$I = i\frac{\pi r^2}{\pi c^2} = i\frac{r^2}{c^2} \qquad (2)$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) παίρνουμε :

$$2\pi r B(r) = \mu_0 i\frac{r^2}{c^2} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi c^2} \qquad (3)$$

Β) Στο χώρο μεταξύ των δύο αγωγών ($c < r < b$) κάθε περιφέρεια κύκλου περιλαμβάνει το σύνολο του ρεύματος που διαρρέει τον εσώτερο αγωγό, οπότε:

$$2\pi r B(r) = \mu_0 i \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \; (4)$$

Γ) Κάθε περιφέρεια κύκλου στο εσωτερικό του εξωτερικού αγωγού ($b < r < a$) περιλαμβάνει το σύνολο του ρεύματος που διαρρέει τον εσώτερο αγωγό και το ποσοστό του ρεύματος που διαρρέει την επιφάνεια του εξωτερικού αγωγού μέχρι την ακτίνα r:

$$I = i - i\frac{\pi(r^2 - b^2)}{\pi(a^2 - b^2)} = i\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2} \qquad (5)$$

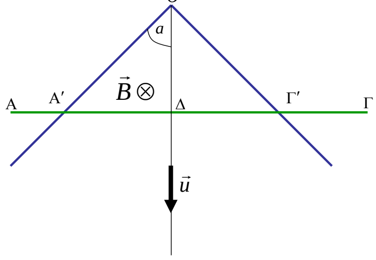
(Το αρνητικό πρόσημο μπαίνει γιατί τα ρεύματα στους δύο αγωγούς έχουν αντίθετες φορές). Αντικαθιστώντας από την (5) στην (1) παίρνουμε :

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2} \qquad (6)$$

Δ) Για $a < r$ είναι $B = 0$ αφού το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων είναι μηδέν.

Άσκηση 9

Α) Δίδεται ένας ευθύγραμμος αγωγός μεγάλου μήκους ο οποίος σχηματίζει στο σημείο Ο γωνία 2α όπως φαίνεται στο σχήμα. Πάνω στον αγωγό και κάθετα στη διχοτόμο αυτής της γωνίας κινείται ένας ευθύγραμμος αγωγός ΑΓ με σταθερή ταχύτητα u. Αν η αντίσταση ανά μονάδα μήκος των αγωγών είναι λ Ωm^{-1}, να βρεθεί το ρεύμα που θα περάσει από το τριγωνικό πλαίσιο που σχηματίζεται, όταν αυτό βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδό του και με φορά αυτήν του σχήματος.



Λύση

Θεωρώντας ως αρχή μέτρησης των αποστάσεων το σημείο Ο και εφόσον η ταχύτητα με την οποία κινείται ο αγωγός ΑΓ είναι σταθερή και ίση με u, η απόσταση ΟΔ σε μια τυχαία χρονική στιγμή t είναι: $x = ut$ (1)

Η ροή από το τριγωνικό πλαίσιο είναι:

$$\Phi = B \cdot S = B \cdot \frac{1}{2}(A'\Gamma')(O\Delta) = B \cdot \frac{1}{2}(2A'\Delta)(O\Delta) \qquad (2)$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι: $(A'\Delta) = x \cdot \tan a$, οπότε η σχέση (2) γίνεται:

$$\Phi = B(x \tan a)x$$

ή χρησιμοποιώντας τη σχέση (1):

$$\Phi = Bu^2 t^2 \tan a \qquad (3)$$

Σύμφωνα με το νόμο του Faraday μεταξύ των σημείων Α′ και Γ′ επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη:

$$\mathrm{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -2Bu^2 t \cdot \tan a \qquad (4)$$

Αν R είναι η ολική αντίσταση του τριγωνικού πλαισίου, το εξ' επαγωγής ρεύμα που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2Bu^2 t \cdot \tan a}{R} \qquad (5)$$

όπου η ολική αντίσταση R είναι:

$$R = \lambda \cdot 2(OA' + A'\Delta) \quad (6)$$

Από το σχήμα προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} A'\Delta &= x \cdot \tan a \\ OA' &= \frac{x}{\cos a} \end{aligned}\right. \qquad (7)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις η αντίσταση υπολογίζεται (σχέση 6):

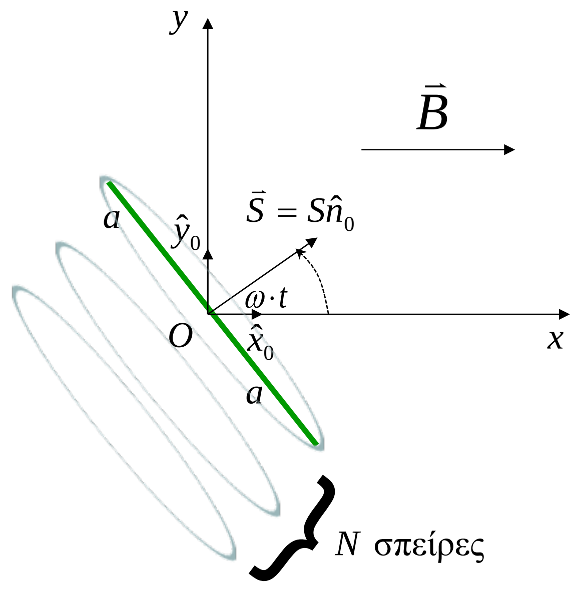
$$R = 2\lambda x\left(\frac{\sin a + 1}{\cos a}\right) \quad (8)$$

Συνεπώς το επαγόμενο ρεύμα (σχέση 5) δίδεται από τη σχέση:

$$I = \frac{Bu \sin a}{\lambda(\sin a + 1)},$$

με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

Β) Έστω ένα κυκλικό σπείραμα κάτοψης S, το οποίο αποτελείται από Ν κυκλικές σπείρες ακτίνας α και ολικής αντίστασης R. Το σπείραμα βρίσκεται αρχικά σε θέση όπου ο άξονας Ox είναι κάθετος στην κυκλική κάτοψη του σπειράματος. Το σπείραμα αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω rad/s γύρω από τον άξονα OZ ο οποίος έχει κατεύθυνση προς τον αναγνώστη (βλέπε σχήμα). Το σπείραμα βρίσκεται μέσα σε ομογενές πεδίο B, παράλληλο στον άξονα x. Να βρεθεί η ένταση του επαγόμενου στο σπείραμα ρεύματος σε μια τυχαία χρονική στιγμή t. (Το διάνυσμα $\vec{S} = S\hat{n}_0$ του σχήματος είναι κάθετο στην κάτοψη του σπειράματος και το S συμβολίζει το εμβαδόν της κάτοψης.)



Λύση

Δεδομένου ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές και το εμβαδό της κάθε σπείρας του σπειράματος είναι σταθερό και ίσο με $S = \pi a^2$, έπεται ότι σε κάθε χρονική στιγμή η ροή που διέρχεται από κάθε μια από τις Ν σπείρες του σπειράματος είναι:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\pi a^2 \hat{x}_0 \cdot \hat{n}_0 = B\pi a^2 \cos \omega t$$

άρα η ροή που περνά από τις Ν σπείρες:

$$\Phi = NB\pi a^2 \cos \omega t$$

Σύμφωνα με το νόμο του Faraday, εφόσον η ροή είναι συνάρτηση του χρόνου, επάγεται στο σπείραμα ηλεκτρεγερτική δύναμη:

$$\mathrm{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = NB\pi a^2 \omega \sin \omega t$$

και άρα το επαγόμενο ρεύμα θα είναι:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{NB\pi a^2 \omega}{R} \sin \omega t$$

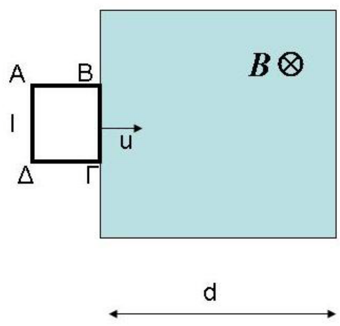
Άσκηση 10

Ένα τετράγωνο συρμάτινο πλαίσιο πλευράς $l = 0.25\ m$ και με αντίσταση ανά μονάδα μήκους $\lambda = 1\ \Omega/m$, εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα $u = 0.05\ m/s$ σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 0.4\ T$ και εύρους $d = 40\ cm$. Το επίπεδο του πλαισίου είναι κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου με φορά προς τα μέσα (βλ. σχήμα). Να υπολογιστούν:

Α) η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο,

Β) η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο πλαίσιο,

Γ) το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο,



Δ) η πολική τάση ανάμεσα στα σημεία Β και Γ του πλαισίου και
Ε) η δύναμη Laplace που δέχεται το πλαίσιο.

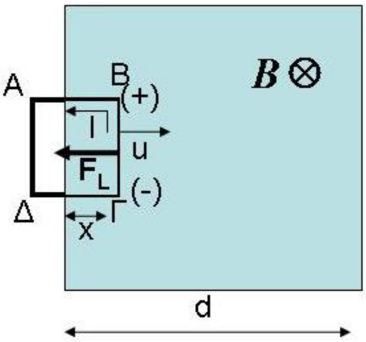
Τα παραπάνω να υπολογιστούν για τρεις διαφορετικές φάσεις της κίνησης του πλαισίου:

i) κατά την είσοδο του πλαισίου στο πεδίο
ii) κατά την κίνησή του μέσα στο πεδίο και
iii) κατά την έξοδό του από το πεδίο.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου τη χρονική στιγμή που η πλευρά ΒΓ εισέρχεται στο μαγνητικό πεδίο,

<u>i) Κατά την είσοδο του πλαισίου στο πεδίο:</u>



Α) Η μαγνητική ροή διέρχεται μόνο από την επιφάνεια του πλαισίου που βρίσκεται εντός του πεδίου, δηλαδή:

$$\Phi = BS\cos 0^0 = Blx \quad (1)$$

Δεδομένου ότι $x = ut$, η μαγνητική ροή μεταβάλλεται με το χρόνο:

$$\Phi = Blut \Rightarrow \Phi = 5\times 10^{-3} t \qquad (2)$$

Β) Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο πλαίσιο έχει σταθερή τιμή:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(Blut)}{dt} = -Blu \qquad (3),$$

και με αριθμητική αντικατάσταση:

$$E = -5\times 10^{-3} V \qquad (4)$$

Γ) Η ολική αντίσταση του πλαισίου είναι :

$$R = \lambda \cdot 4l = 1\,\Omega \qquad (5)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση και τη σχέση (4), προκύπτει ότι η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πλαίσιο είναι:

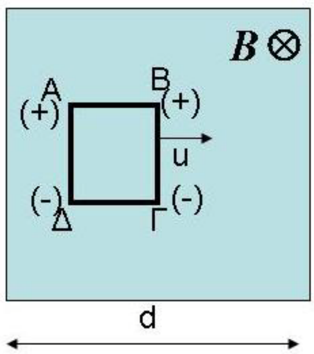
$$I = \frac{E}{R} = -5\times 10^{-3} A \quad (6)$$

Δ) Με χρήση των σχέσεων (4), (5) και (6) προκύπτει ότι το μέτρο της πολικής τάσης ανάμεσα στα άκρα Β και Γ είναι:

$$|V_{B\Gamma}| = E - IR = 3.75\times 10^{-3} V \qquad (7)$$

Ε) Η δύναμη Laplace που υφίσταται η πλευρά ΒΓ από το μαγνητικό πεδίο έχει φορά αντίθετη της κίνησης του πλαισίου και μέτρο:

$$F_L = BIl\sin 90^0 \Rightarrow F_L = 5\times 10^{-4} N \quad (8)$$



<u>ii) Κατά την κίνηση του πλαισίου μέσα στο πεδίο:</u>

Α) Η μαγνητική ροή διέρχεται από την επιφάνεια του πλαισίου έχει σταθερή τιμή:

$$\Phi = BS\cos 0^0 = Bl^2 \Rightarrow \Phi = 25\times 10^{-3} Wb \qquad (9)$$

Β) Επειδή η μαγνητική ροή δεν μεταβάλλεται, δεν επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη στο πλαίσιο:

$$E = 0 \quad (10)$$

(Κατά τη διάρκεια της κίνησης του πλαισίου μέσα στο πεδίο επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη στις πλευρές ΒΓ και ΑΔ με τιμή ίση με $E = Bul$, αλλά αντίθετης πολικότητας, με αποτέλεσμα η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο πλαίσιο να είναι μηδενική)

Γ) Επειδή δεν επάγεται ηλεκτρεγερτική δύναμη, το πλαίσιο δεν διαρρέεται από ρεύμα:

$$I = 0 \quad (11)$$

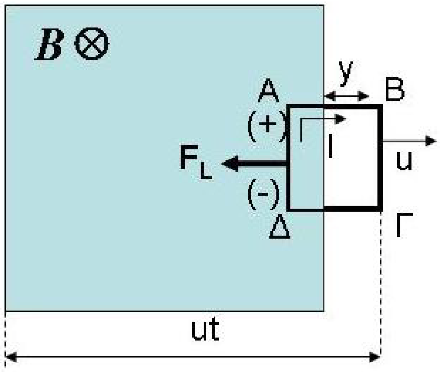
Δ) Εφόσον το πλαίσιο δεν διαρρέεται από ρεύμα, η πολική τάση στα άκρα Β και Γ θα είναι ίση με την ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται ανάμεσα σε αυτά τα άκρα:

$$|V_{B\Gamma}| = E_{B\Gamma} = Bul \Rightarrow |V_{B\Gamma}| = 5\times 10^{-3} V \qquad (12)$$

Ε) Το πλαίσιο δεν δέχεται δύναμη Laplace από το μαγνητικό πεδίο:

$$F_L = 0 \qquad (13)$$

iii) Κατά την έξοδο του πλαισίου από το πεδίο:



Α) Η μαγνητική ροή διέρχεται μόνο από την επιφάνεια του πλαισίου που βρίσκεται εντός του πεδίου, δηλαδή από επιφάνεια εμβαδού $S = l(l - y)$, όπου y είναι το οριζόντιο τμήμα του πλαισίου που βρίσκεται εκτός πεδίου: $y = ut - d$. Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η μαγνητική ροή είναι:

$$\Phi = BS\cos 0^0 = Bl(l + d) - Bult \qquad (14)$$

και με αριθμητική αντικατάσταση:

$$\Phi = \left(65\times 10^{-3} - 5\times 10^{-3} t\right) \ Wb \qquad (15)$$

Β) Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στο πλαίσιο έχει σταθερή αλγεβρική τιμή:

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\left(Bl\left(l+d\right) - Bult\right)}{dt} = Bul \Rightarrow E = 5\times 10^{-3} \ V \quad (16)$$

Γ) Το πλαίσιο διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{5\times 10^{-3} V}{1\Omega} \Rightarrow I = 5\times 10^{-3} A \quad (17)$$

Παρατηρούμε ότι το ρεύμα έχει αντίθετο πρόσημο από το ρεύμα που επάγεται κατά την είσοδο του πλαισίου στο μαγνητικό πεδίο. (Το ρεύμα επάγεται στην πλευρά ΑΔ του πλαισίου.)

Δ) Η πλευρά ΒΓ βρίσκεται εκτός μαγνητικού πεδίου άρα δεν αναπτύσσεται στα άκρα της ηλεκτρεγερτική δύναμη. Συνεπώς η τάση στα άκρα της οφείλεται μόνο στην πτώση τάσης λόγω του ρεύματος (σχέση 17) που τη διαρρέει:

$$\left|V_{B\Gamma}\right| = IR_{B\Gamma} = I \cdot \lambda l \Rightarrow \left|V_{B\Gamma}\right| = 1.25 \times 10^{-3}\ V \qquad (18)$$

Ε) Η πλευρά ΑΔ του πλαισίου δέχεται δύναμη Laplace :

$$F_L = BIl \sin 90^0 \Rightarrow F_L = 5 \times 10^{-4} N \qquad (19)$$